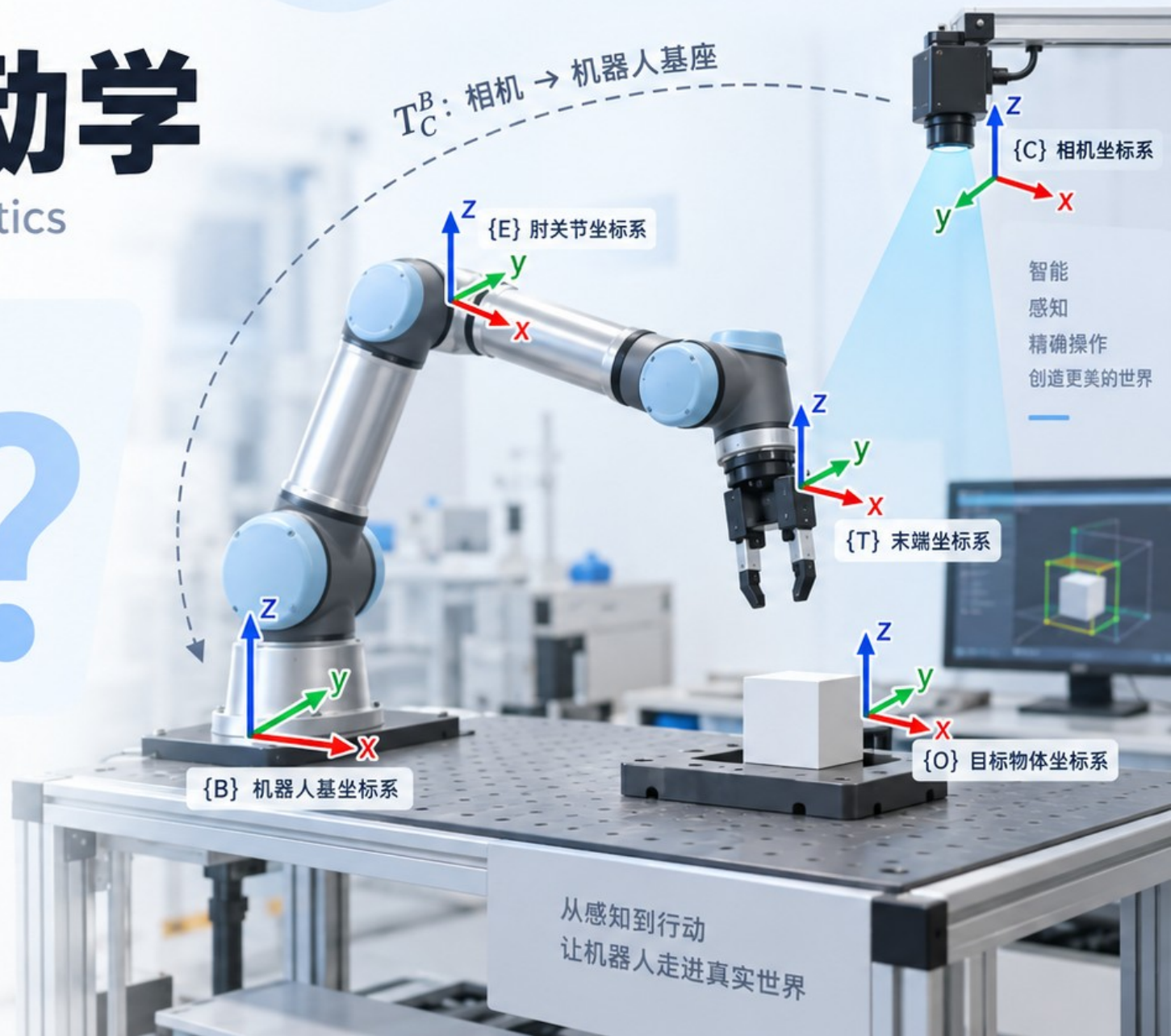


坐标系与正运动学

Coordinate Frames & Forward Kinematics

“机器人怎样把
“相机看到的位置”
转换成
“机械臂能够执行的目标”

从坐标表达走向关节链计算



智能
感知
精确操作
创造更美的世界

从感知到行动
让机器人走进真实世界



本周学习目标

从“相对于谁”到“末端在哪里”

“

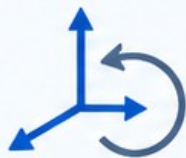
完成本周后，应能够**解释并计算**以下问题

01



读懂坐标系、点坐标、
旋转矩阵和齐次变换的
基本记号

02



判断旋转与变换的方向，
正确完成多坐标系之间的
链式计算

03

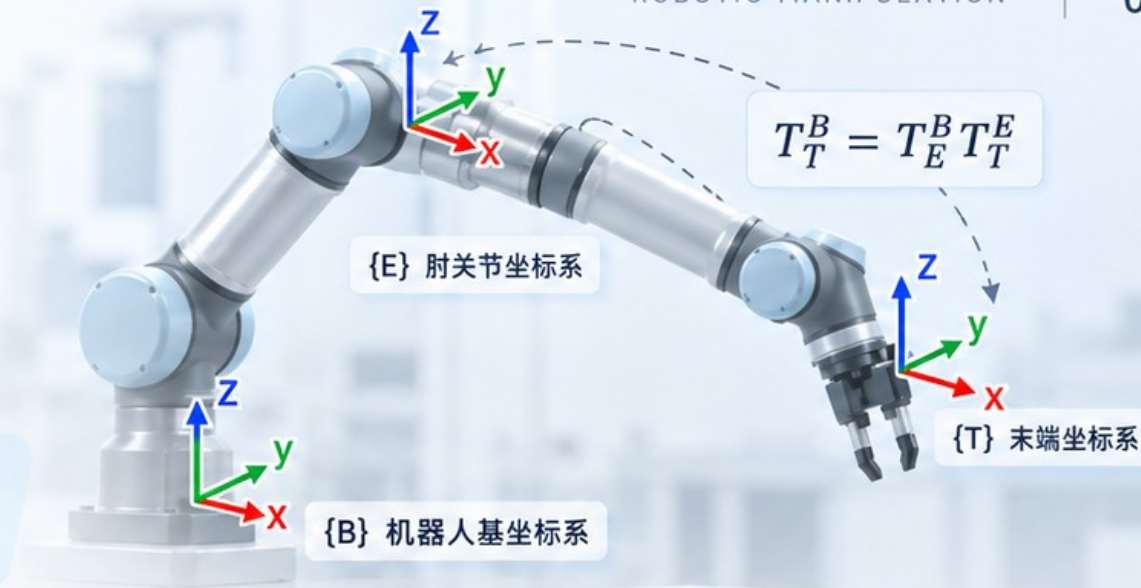


建立串联机械臂的正运动学
表达，理解关节变量如何
决定末端位姿

04



用简单数值例子检查结果，
并定位常见的**坐标系、单位**
和乘法顺序错误



90 分钟课堂节奏

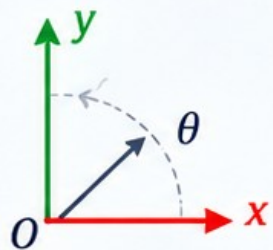
讲解、计算与练习交替进行

学会表达位置
让机器人真正动起来

**01**

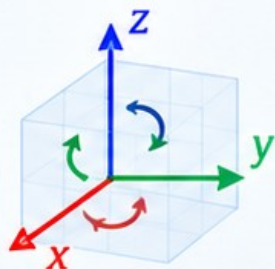
0-18 分钟

坐标系、记号与
二维旋转直观

**02**

18-38 分钟

三维旋转矩阵、
性质与组合顺序

**03**

38-60 分钟

平移、齐次变换
与坐标链

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**04**

60-82 分钟

机械臂关节链
与正运动学

**05**

82-90 分钟

综合排错、总结
与课后任务

- ✓ 检查与调试
- ✓ 知识总结
- ✓ 课后任务



三次随堂练习分别检查记号、变换链和正运动学建模



第一周回顾

位姿是感知、规划与控制之间的共同语言

智能
感知
精确操作
创造更美的世界



“ 第二周关注这条闭环中最基础的空间表达与坐标转换

Perceive
Plan
Control
Repeat

从感知到行动
让机器人走进真实世界



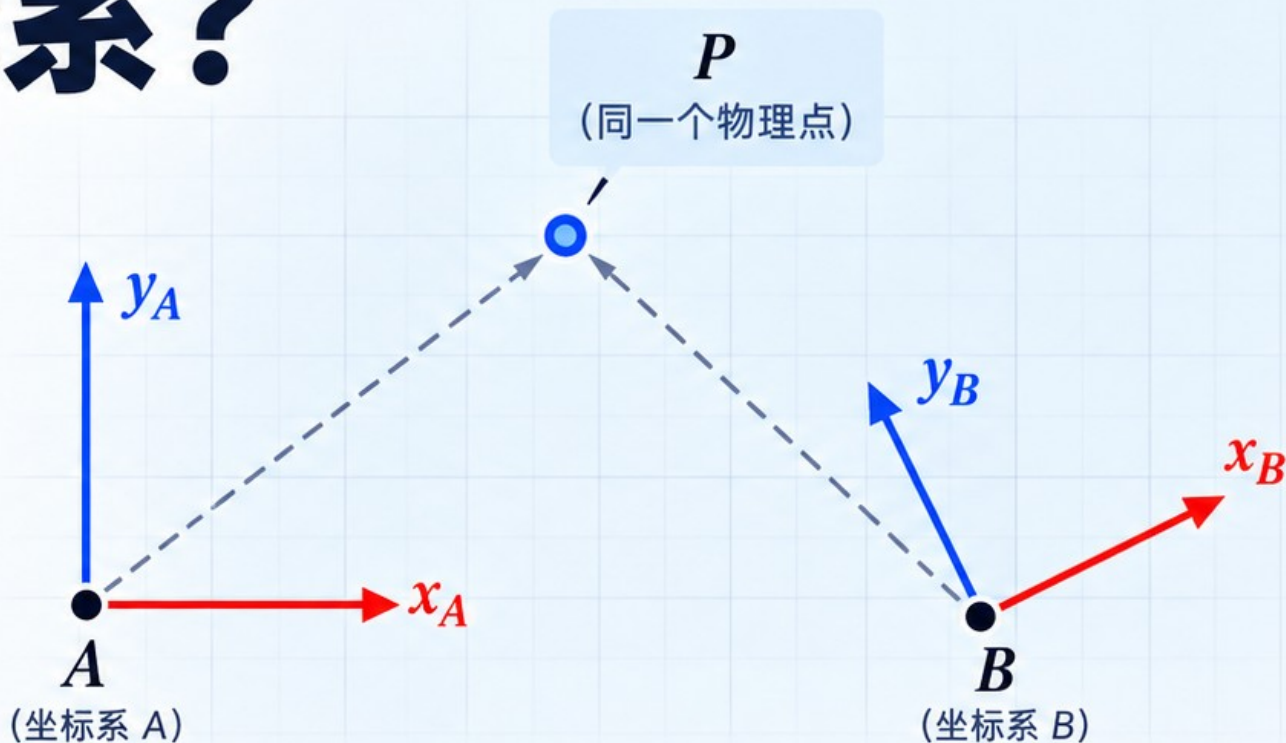
为什么需要坐标系？

位置数值只有在参考系明确时才有意义

“

同一个点 P 的物理位置不变，
但观察者 A 与 B 使用**不同的
原点和轴方向**，因此得到不同坐标。

机器人系统必须明确每个数据
相对于哪个坐标系。



$$p_P^A \neq p_P^B$$

但它们描述同一个点 P



坐标系包含什么？

原点决定位置基准，坐标轴决定方向基准

- 二维坐标系由一个原点和两条互相垂直的轴组成。三维坐标系增加 z 轴，并遵循右手规则。
- 坐标系本身也有位姿：原点位置和轴方向。

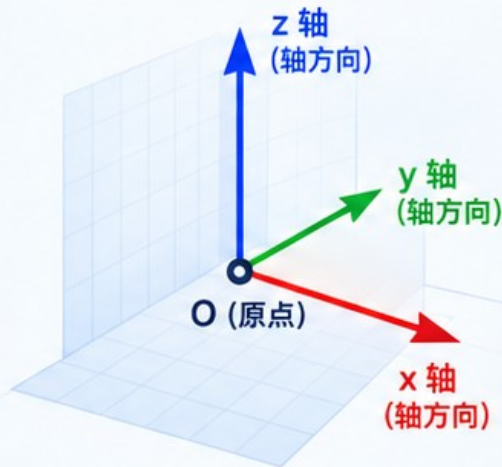
坐标系位姿 = 原点位置 + 轴方向

二维坐标系 (2D)



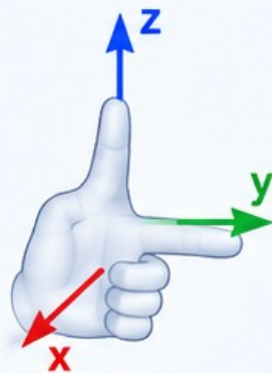
由一个原点和两条互相垂直的轴组成。

三维坐标系 (3D)



在二维坐标系基础上增加 z 轴，并遵循右手规则。

右手规则



右手四指弯曲，大拇指指向 z 轴，食指指向 x 轴，中指指向 y 轴。



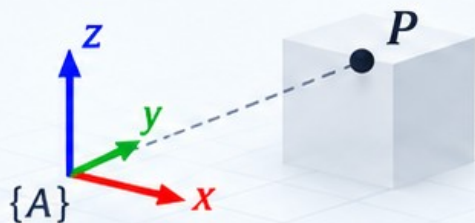
机器人学中的坐标记号

右上标表示表达坐标系，右下标表示对象或目标坐标系

01

$$p_P^A$$

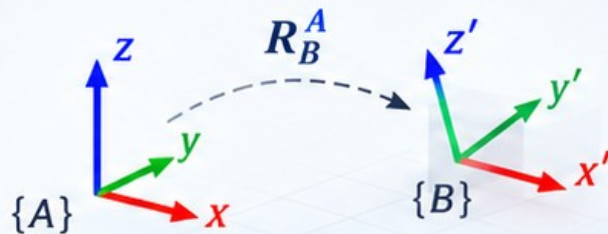
点 P 在 A 系中的坐标



02

$$R_B^A$$

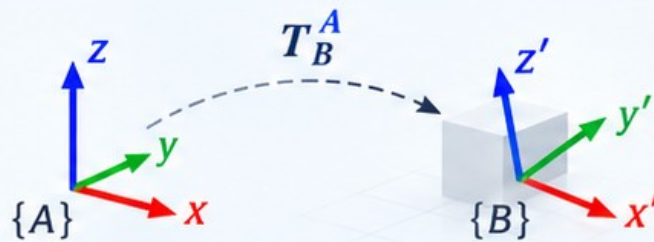
B 系相对于 A 系的旋转



03

$$T_B^A$$

从 B 系映射到 A 系的齐次变换

**A**

右上标回答：
在哪个坐标系表达

例如 p_P^A 表示
在 A 系中表达

B

右下标回答：
描述哪个对象或坐标系

例如 R_B^A 表示
关于 B 系的旋转



点、向量与坐标

几何对象与数值表示需要区分

几何对象

与坐标系无关的几何实体

- 点表示空间中的位置
- 向量表示方向和大小
- 对象本身不依赖坐标系



点 P

表示空间中的位置



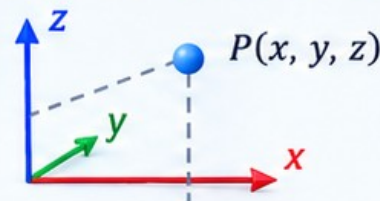
向量 $\vec{v}$

表示方向和大小

坐标表示

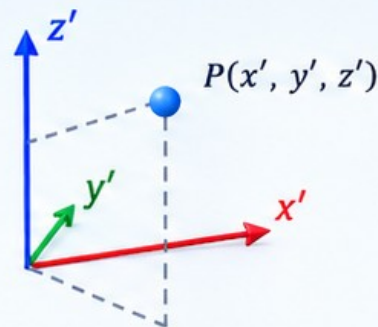
相对于某个基的数值描述

- 坐标是相对于某个基的数字
- 更换坐标系会改变坐标
- 同一对象可有多组等价表示



在基 $\{A\}$ 中的坐标

$$P_A = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



在基 $\{B\}$ 中的坐标

$$P_B = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$



变换矩阵改变的是坐标表示，不会改变被描述的物理对象



坐标记号快速判断

随堂练习 1 · 先独立判断，再与同伴核对



问题

已知 T_B^A 和 p_P^B ，希望求 p_P^A 。

1

写出正确的矩阵乘法顺序

请用坐标变换的记号表示如何由已知量得到 p_P^A 。

2

说明结果在哪个坐标系表达

请明确你求出的 p_P^A 是在什么坐标系中表示的。

3

指出如果只有 T_A^B ，应怎样处理

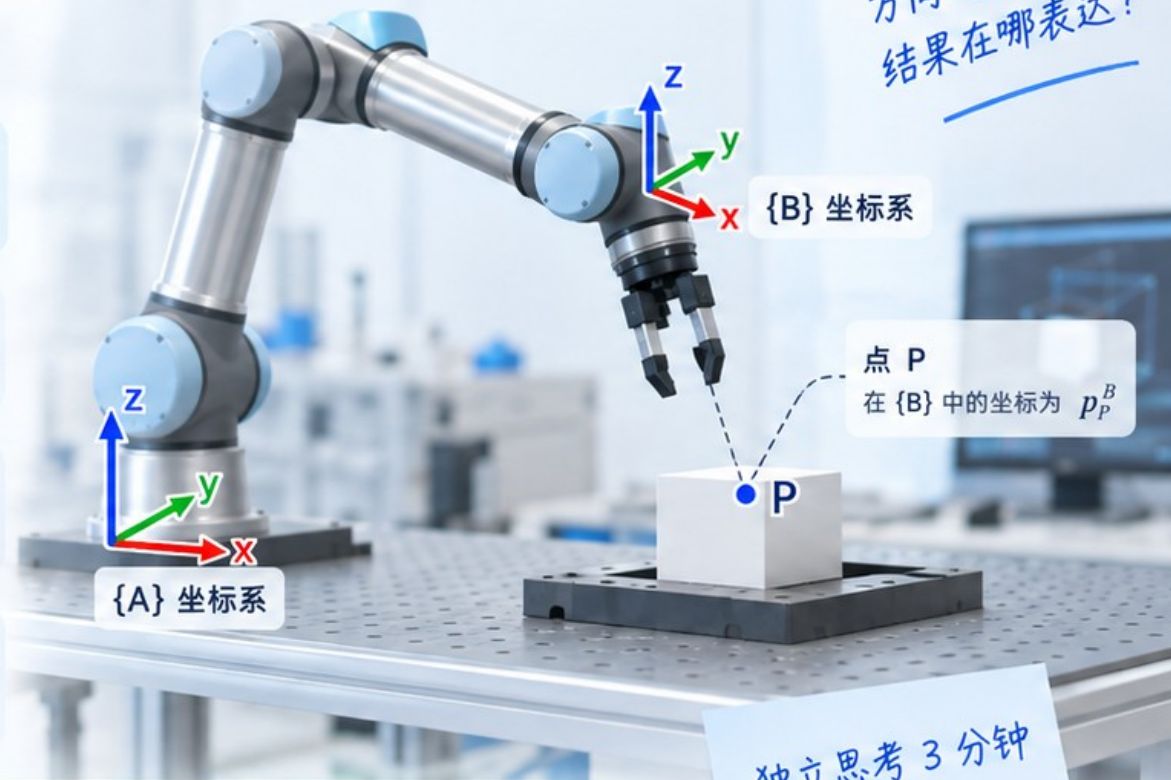
如果已知的是相反方向的变换 T_A^B ，你会如何得到所需的变换？



输出：一条公式、一句方向解释和一个自检方法

写下你的答案，并与同伴讨论核对。

想一想：
坐标怎么变？
方向对不对？
结果在哪表达？

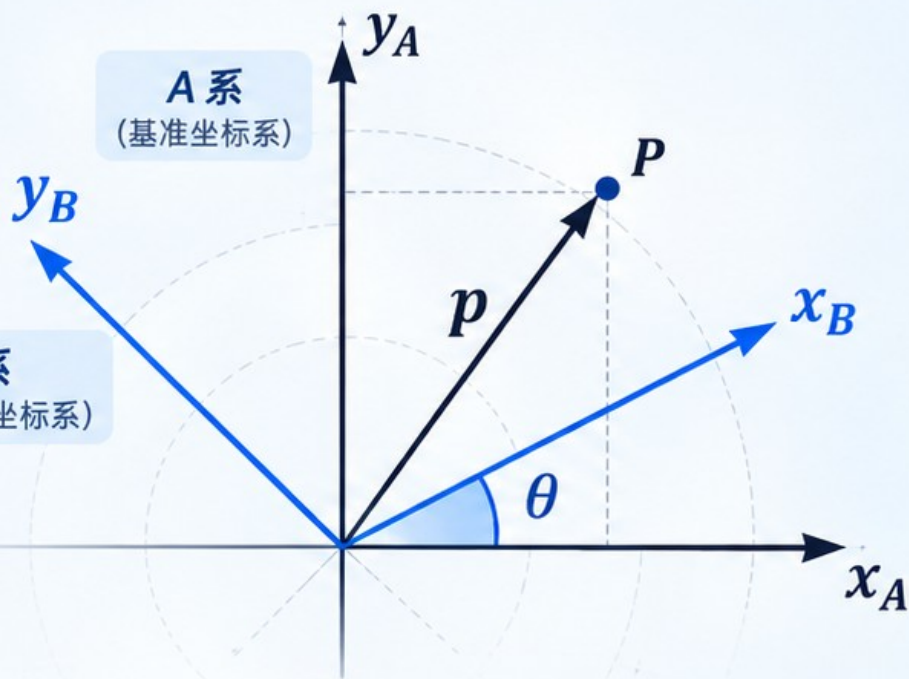


独立思考 3 分钟
再一起讨论！



二维旋转的直观

旋转改变轴方向，也改变同一向量的坐标表示



同一个向量，在不同的坐标系中有不同的坐标表示，但它在空间中的几何意义不变。

“

把 B 系相对于 A 系逆时针旋转 θ 。

B 系的两个单位轴在 A 系中的坐标，构成旋转矩阵的两列。

旋转矩阵本质上记录 **“新坐标轴在旧坐标系里指向哪里”**。

B 系的单位轴在 A 系中的坐标

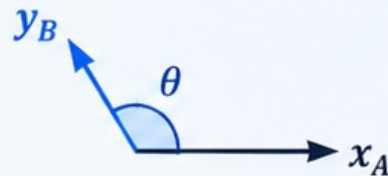
x_B 在 A 系中的坐标：

$$\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = {}^A x_B$$



y_B 在 A 系中的坐标：

$$\begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} = {}^A y_B$$



旋转矩阵 (B 系 $\rightarrow$ A 系)

$$R_B^A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = [{}^A x_B \quad {}^A y_B]$$

矩阵的两列，
就是 B 系的两个单位轴
在 A 系中的坐标。



二维旋转矩阵

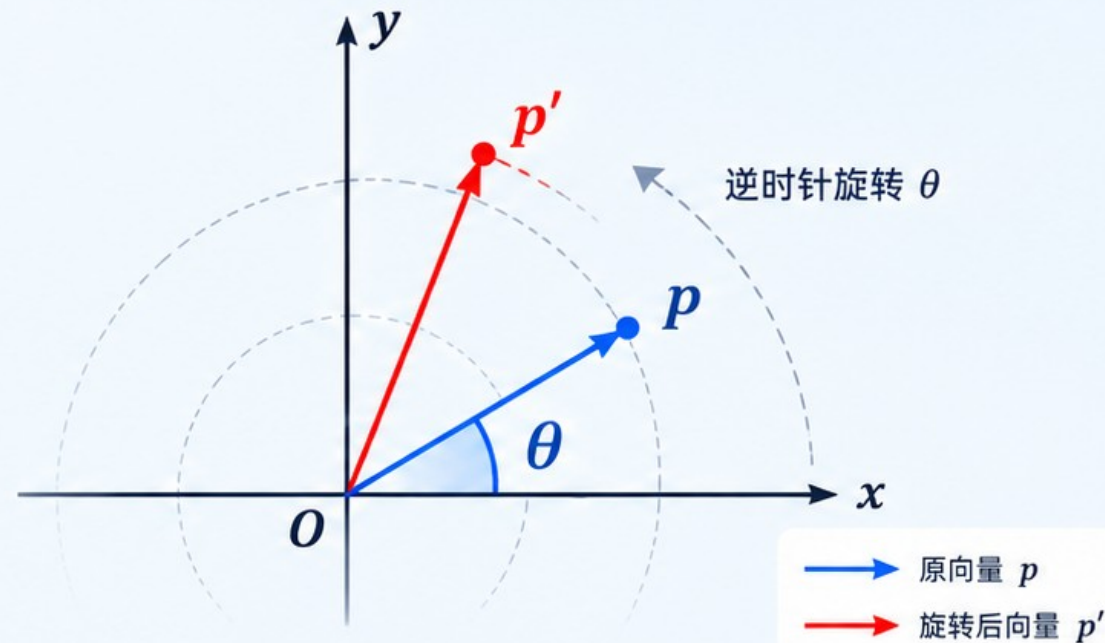
逆时针旋转 θ ，采用列向量约定

二维旋转矩阵

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

对于任意二维向量 p ，逆时针旋转 θ 后得到

$$p' = R(\theta)p$$



重要性质

- 1 第一列是旋转后 x 轴的坐标: $[\cos \theta, \sin \theta]^T$
- 2 第二列是旋转后 y 轴的坐标: $[-\sin \theta, \cos \theta]^T$
- 3 $\theta = 0$ 时得到单位矩阵 I 。
- 4 $\theta = 90^\circ$ 时 x 轴映射到 y 轴。



快速检查

用几个特殊角度来验证旋转矩阵是否正确。

- 1 $\theta = 0^\circ$ 时,

$$R(0^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

- 2 $\theta = 90^\circ$ 时,

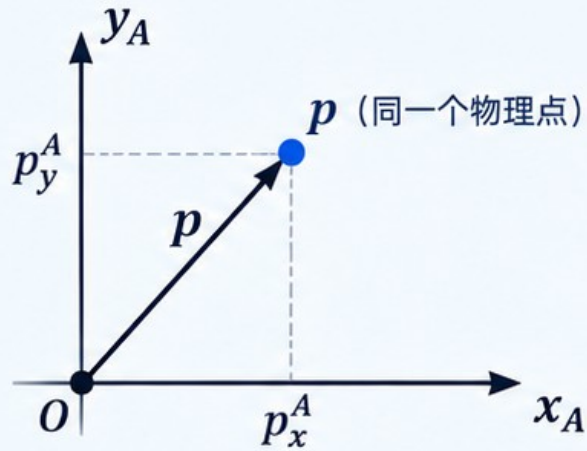
$$R(90^\circ) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



二维旋转的几何理解

旋转改变了坐标轴的方向，而不是点本身

01 原始坐标系 A

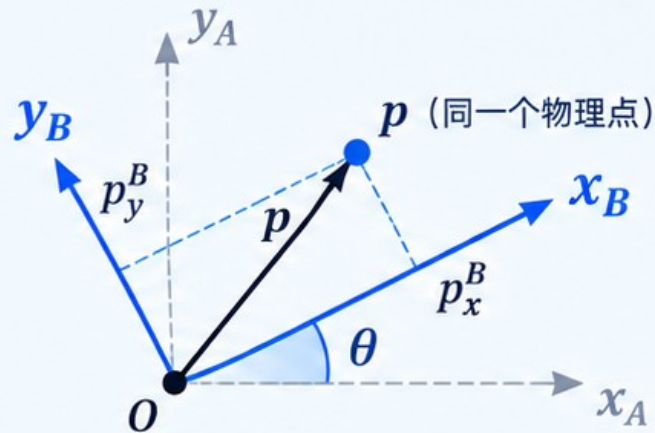


在 A 系中的坐标表示

$$p^A = \begin{bmatrix} p_x^A \\ p_y^A \end{bmatrix}$$

点 p 在 A 系中
由坐标 (p_x^A, p_y^A) 表示

02 旋转后的坐标系 B



在 B 系中的坐标表示

$$p^B = \begin{bmatrix} p_x^B \\ p_y^B \end{bmatrix}$$

同一个点 p 在 B 系中
由坐标 (p_x^B, p_y^B) 表示

两种坐标表示的关系:

$$p^A = R_B^A p^B$$



关键理解

旋转矩阵不是把点真的搬动，
而是把 B 系下的坐标值转换到 A 系。



三维旋转矩阵

绕坐标轴的基本旋转



右手规则：

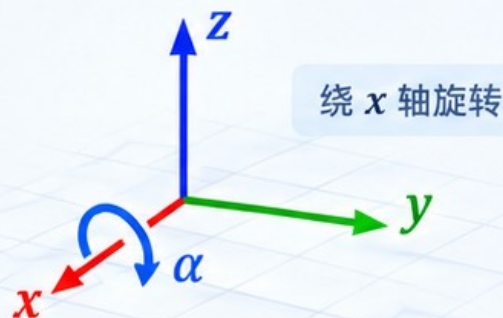
右手四指指旋转方向，
大拇指指向正轴方向。



01 绕 x 轴旋转

绕 x 轴旋转角度 α (右手规则)

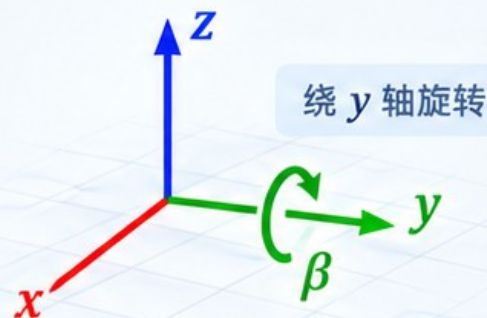
$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$



02 绕 y 轴旋转

绕 y 轴旋转角度 β (右手规则)

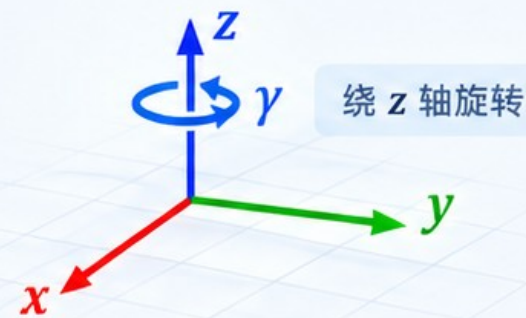
$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$



03 绕 z 轴旋转

绕 z 轴旋转角度 γ (右手规则)

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



三维旋转的性质

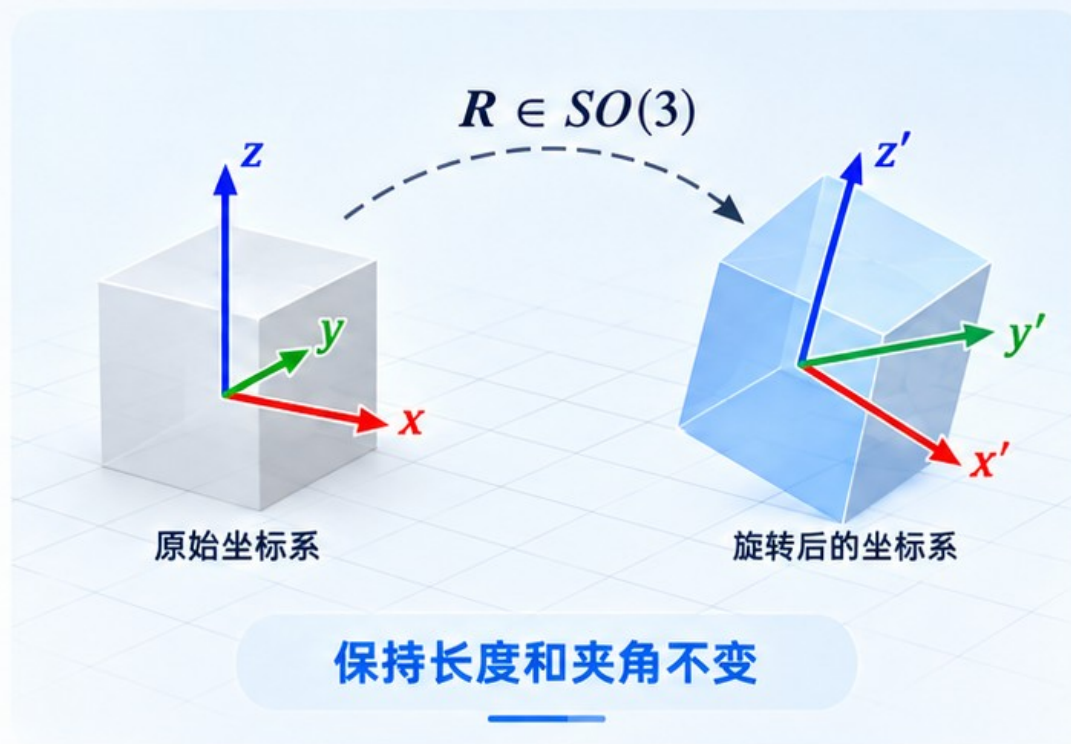
旋转矩阵是正交矩阵，具有良好的几何性质

三维旋转
矩阵的性质

$$R^T R = I, \quad \det(R) = 1$$

其中 $R \in SO(3)$ 是一个三维旋转矩阵。

- 1 正交性** $R^T R = I$ ，即 R 的列向量（或行向量）两两正交，且为单位向量。
- 2 行列式为 1** $\det(R) = 1$ ，表示旋转保持右手坐标系的方向（不发生镜像）。
- 3 保持向量长度** 任意向量 $\mathbf{v}$ ， $\|R\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ ，旋转不改变向量的模长。
- 4 保持夹角** 任意两个向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ， $(R\mathbf{u}) \cdot (R\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ，旋转不改变向量之间的夹角。
- 5 旋转向量组合后仍是旋转** 若 $R_1, R_2 \in SO(3)$ ，则 $R_1 R_2 \in SO(3)$ ，两个旋转的组合仍是一个旋转。



“

?

思考题：

为什么 $R^T = R^{-1}$ ？

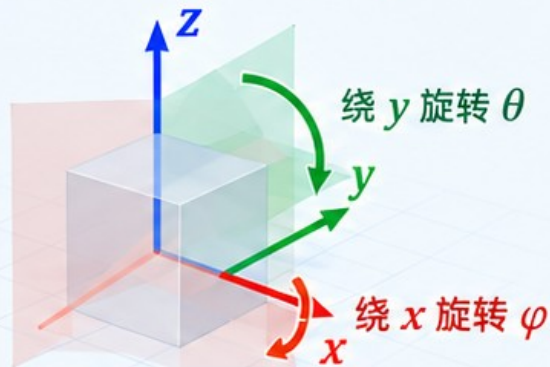
请结合列向量正交的几何含义解释。



旋转顺序很重要

三维旋转通常不满足交换律，顺序不同结果不同

01 先绕 x 再绕 y

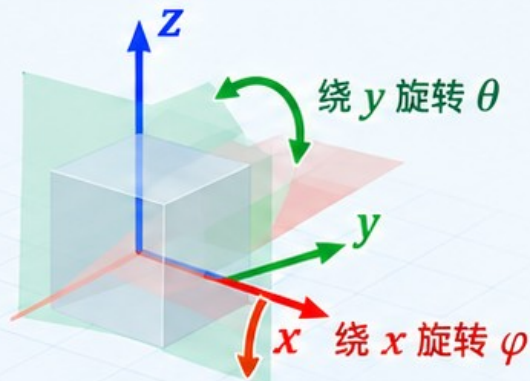


旋转矩阵为

$$R_y(\theta)R_x(\varphi)$$

先绕 x 轴旋转 φ ，
再绕 y 轴旋转 θ 。

02 先绕 y 再绕 x



旋转矩阵为

$$R_x(\varphi)R_y(\theta)$$

先绕 y 轴旋转 θ ，
再绕 x 轴旋转 φ 。



组合顺序的规则

组合顺序按矩阵从右到左依次作用

若写成 $R = R_2R_1$ ，则先对向量应用 R_1 ，
再应用 R_2 （右边的矩阵先作用）。



常见的旋转组合记号

$$R = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(\alpha)$$

这是常用的 Z-Y-X（航向-俯仰-滚转）
旋转顺序的记号示例。

务必在使用时明确说明
所采用的坐标系和旋转顺序约定。



从旋转到刚体变换

除了旋转，还需要平移来描述完整位姿

1

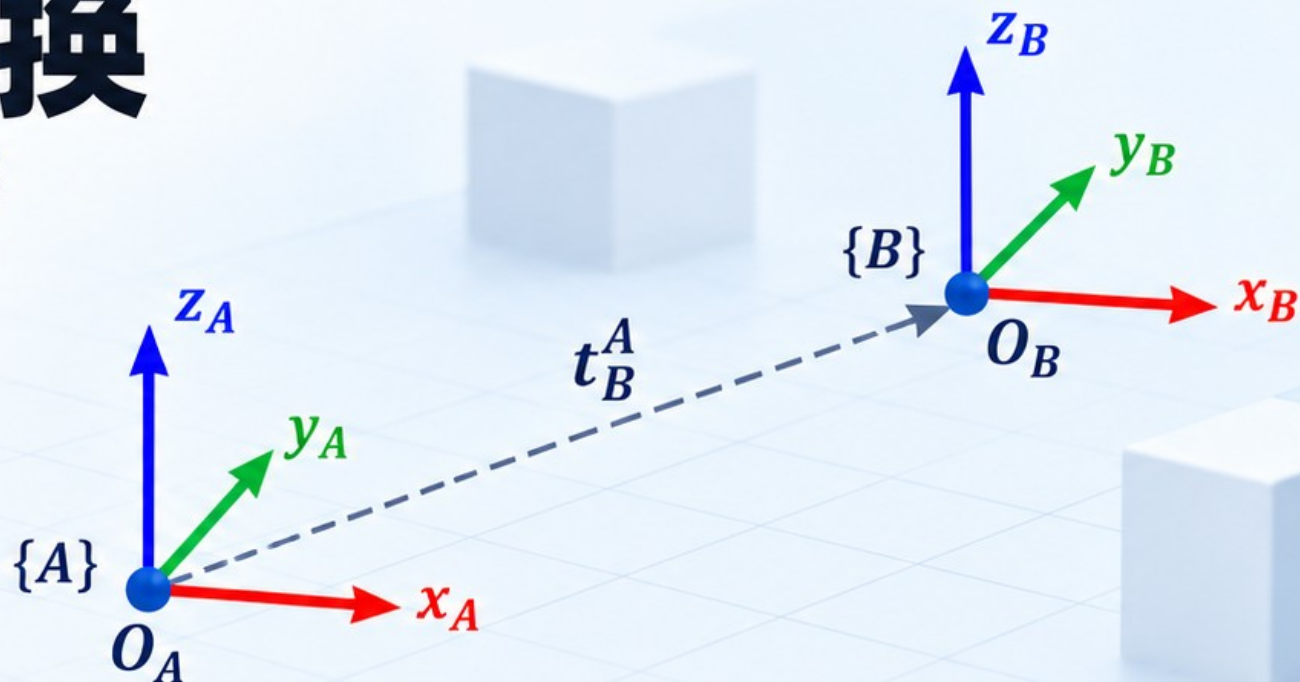
旋转 R :

描述坐标轴方向的改变

2

平移 t :

描述原点位置的改变



B 系相对于 A 系的位姿 = 旋转 R_B^A + 平移 t_B^A



齐次变换矩阵

用 4×4 矩阵统一表示旋转和平移

“

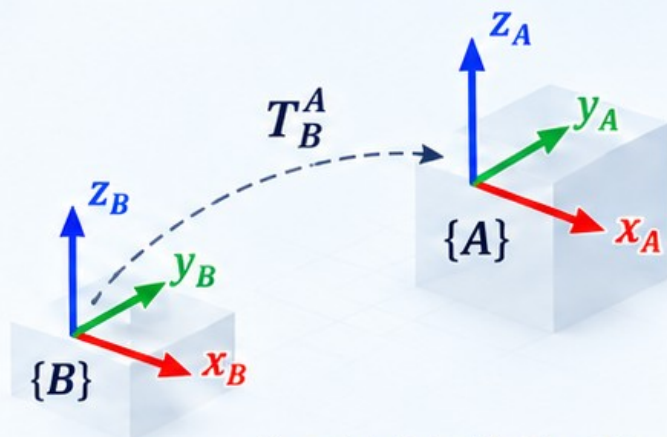
齐次变换矩阵可以同时描述刚体的旋转和平移，是机器人运动学中最常用的坐标变换表示方式。

1 左上角 3×3
为旋转矩阵 R_B^A

2 右上角 3×1
为平移向量 t_B^A

$$T_B^A = \begin{bmatrix} R_B^A & t_B^A \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

3 最后一行为 $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$



将 B 系中的点变换到 A 系中：
先旋转，再平移。

齐次坐标的变换关系

$$p_h^A = T_B^A p_h^B$$

其中齐次坐标为

$$p_h^B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_h^A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ 1 \end{bmatrix}$$



要点总结

- T_B^A 是 4×4 的齐次变换矩阵
- 左上角 3×3 表示旋转，右上角 3×1 表示平移
- 最后一行为 $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$
- 可以用一个矩阵统一表示旋转和平移，并作用于齐次坐标



点与方向向量的齐次表示

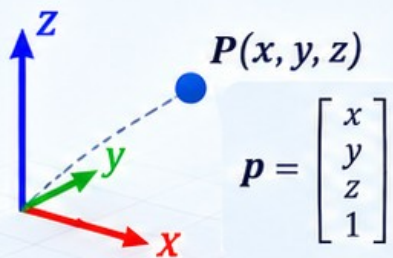
通过最后一维区分点和方向向量

智能
感知
精确操作
创造更美的世界

01 点（位置向量）

一个三维空间中的点，用齐次坐标表示为：

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

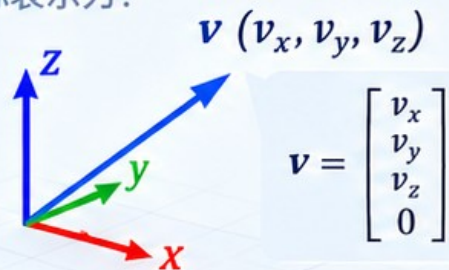


点的齐次坐标会受到平移变换的影响。

02 方向向量

一个三维空间中的方向向量，用齐次坐标表示为：

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$



方向向量的齐次坐标不受平移变换的影响。

03 验证：齐次变换对点和方向向量的作用

设刚体变换的齐次矩阵为 $T = \begin{bmatrix} R & t \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$ ，则有：

对方向向量：

$$T \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix}$$

对点：

$$T \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\mathbf{p} + t \\ 1 \end{bmatrix}$$



核心结论：平移会改变点的位置，但不会改变方向向量。



多个坐标系的链式变换

通过矩阵乘法连接不同坐标系

多个坐标系可以
通过矩阵乘法
一步步连接起来！



重要提醒

1

相邻坐标系必须匹配

矩阵的下标（来源坐标系）必须与下一个矩阵的上标（目标坐标系）一致。

2

矩阵乘法顺序不能颠倒

必须按照坐标变换的链条顺序从右到左相乘，不能随意调换顺序。

3

最终结果的坐标系看最左侧上标

连乘后的矩阵的上标，表示变换结果所在的坐标系。

{A} 坐标系

{B} 坐标系

{C} 坐标系

T_B^A

T_C^B

B 系 → A 系

C 系 → B 系

链式变换的齐次矩阵

$$T_C^A = T_B^A T_C^B$$

从 C 系到 A 系的变换，
等于从 C 系到 B 系，再从 B 系到 A 系的变换。

点的坐标变换

$$p^A = T_C^A p^C = T_B^A T_C^B p^C$$

如果已知点在 C 系中的坐标 p^C ，
则可通过链式变换得到它在 A 系中的坐标 p^A 。



随堂练习 2

变换链计算



问题

已知机器人基座 A 、相机 C 和目标点 P 。
相机相对于基座的变换为 T_C^A ，目标点在相机坐标系中的坐标为 p_P^C ，请计算目标点在基座坐标系中的坐标 p_P^A 。

1

写出正确的矩阵乘法公式

请写出 p_P^A 与 T_C^A 、 p_P^C 的关系式。

2

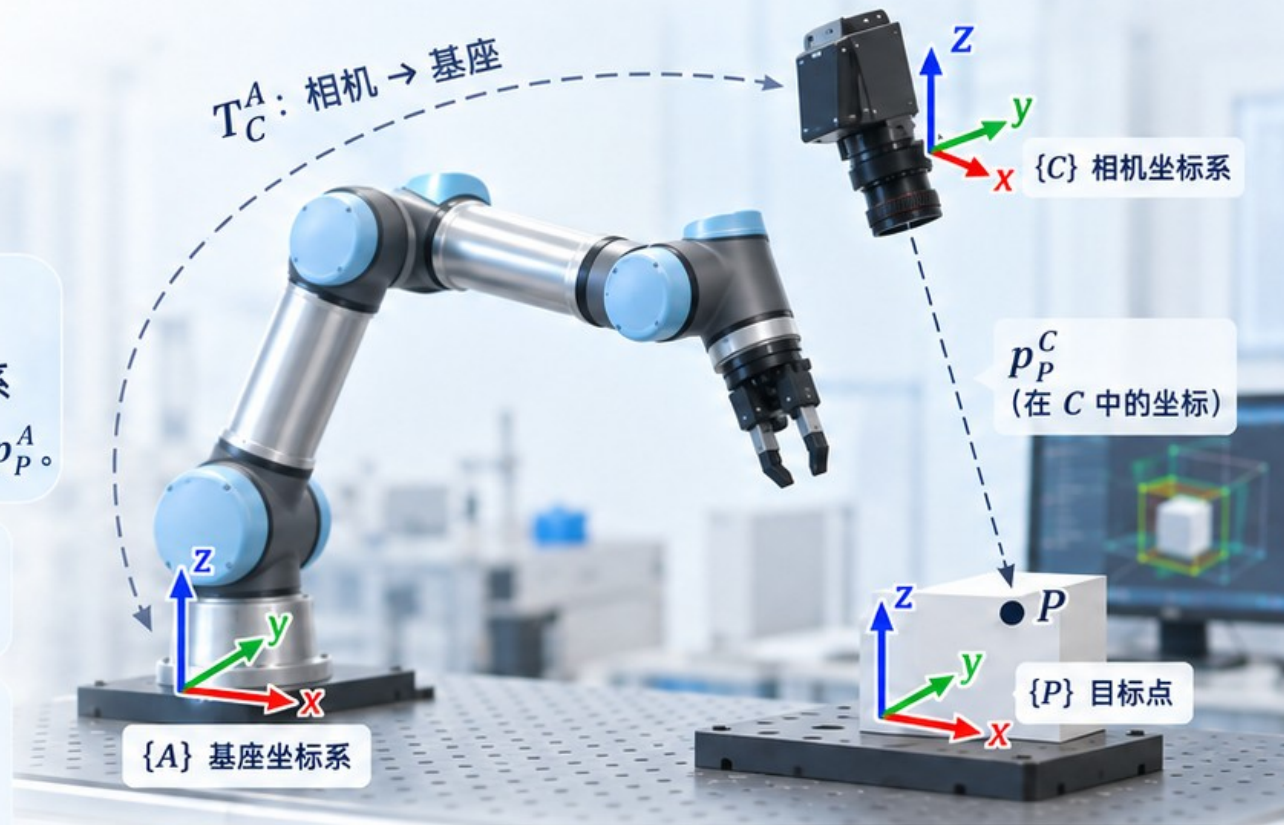
如果已知的是 T_A^C ，应如何处理

请说明当已知的是相反方向的变换 T_A^C 时，如何求得 p_P^A 。

3

如何自检结果是否合理

请给出至少两种检查方法，说明如何判断你得到的 p_P^A 是否正确、合理。



提示：

- 注意变换方向（从哪个坐标系到哪个坐标系）
- 检查单位和坐标系是否一致
- 可先用简单数值例子验证你的结果

先想一想，
再动手算！



旋转矩阵自检

第二周·随堂练习 | 先独立判断，再与同伴核对



问题

给定旋转矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

请完成以下三个问题：

- 1 判断它绕哪根轴旋转了多少角度？
- 2 计算 $R \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。
- 3 不做通用求逆，直接写出 R^{-1} 。

——> 输出：旋转轴与角度、变换后的单位向量、逆矩阵

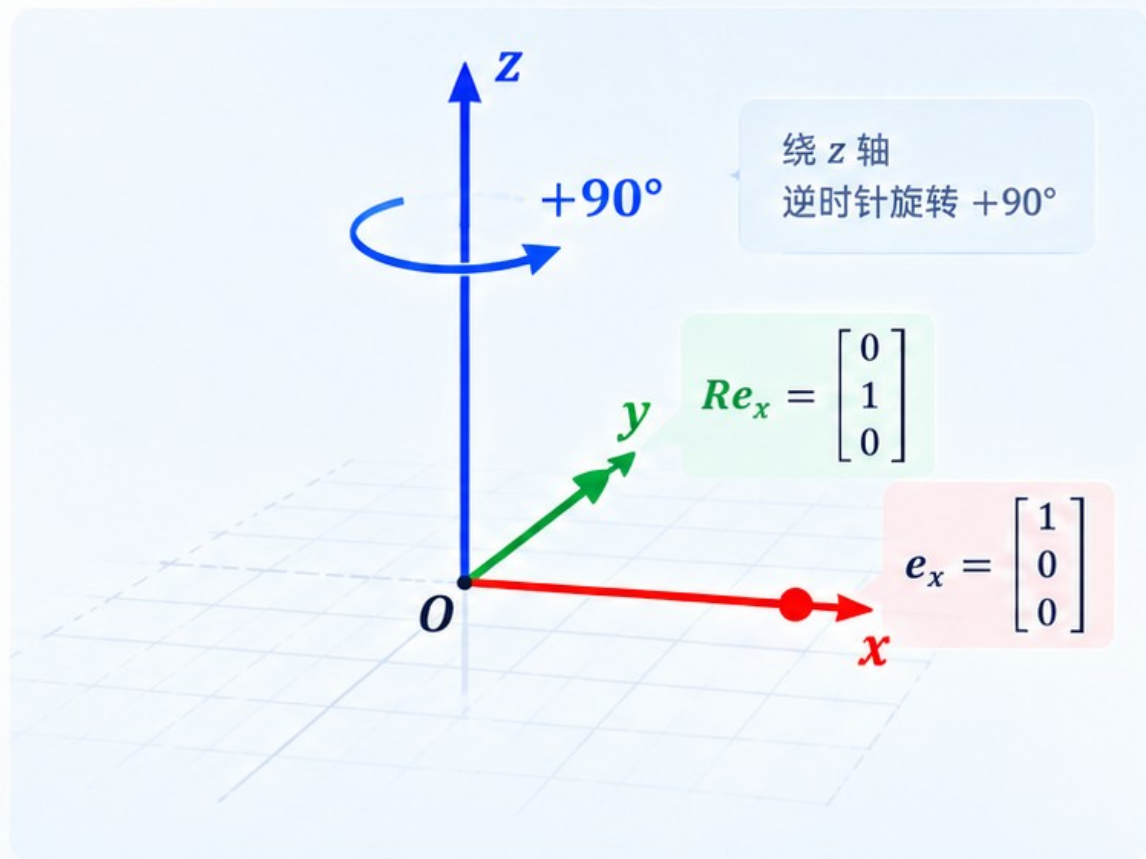


思考提示

- 1 第三列是 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，说明 z 轴保持不变，因此是绕 z 轴的旋转。

- 2 计算 Re_x 就是求 x 轴单位向量在旋转后的像，表示旋转后的 x 轴方向。

- 3 对于旋转矩阵，有 $R^{-1} = R^T$ ，因此可以直接写出逆矩阵。



平移描述坐标系原点

旋转决定轴方向，平移决定原点位置

1 A 系中的点坐标

点 P 在 A 系中的坐标可以表示为

$$p_P^A = p_P^B + p_B^A$$

2 B 系原点在 A 系中的位置

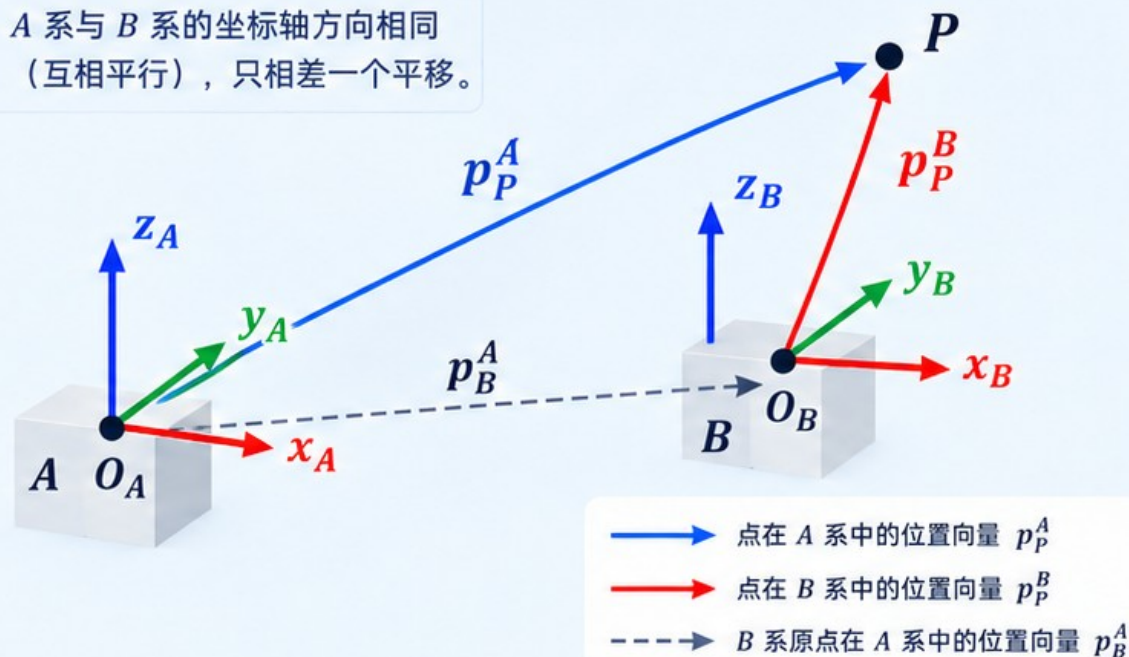
p_B^A 表示 B 系原点在 A 系中的位置向量，即从 A 的原点 O_A 指向 B 的原点 O_B 。

3 只有平移、没有旋转

A 系和 B 系的坐标轴方向完全相同（互相平行），因此它们只相差一个平移向量，满足 $R = I$ 。此时坐标变换只需加上平移向量：

$$p^A = p^B + p_B^A$$

A 系与 B 系的坐标轴方向相同（互相平行），只相差一个平移。



重要结论

平移会改变点的位置坐标，但不会改变纯方向向量。

- 对于点的坐标，需要加上平移向量： $p_P^A = p_P^B + p_B^A$
- 对于纯方向向量（例如速度、力的方向），由于不受原点位置影响，其在两个平移坐标系中的表示相同： $v^A = v^B$ 。
- 只有当存在旋转时，方向向量才会发生变换。



刚体变换同时包含旋转与平移

先把坐标轴方向统一，再处理原点偏移

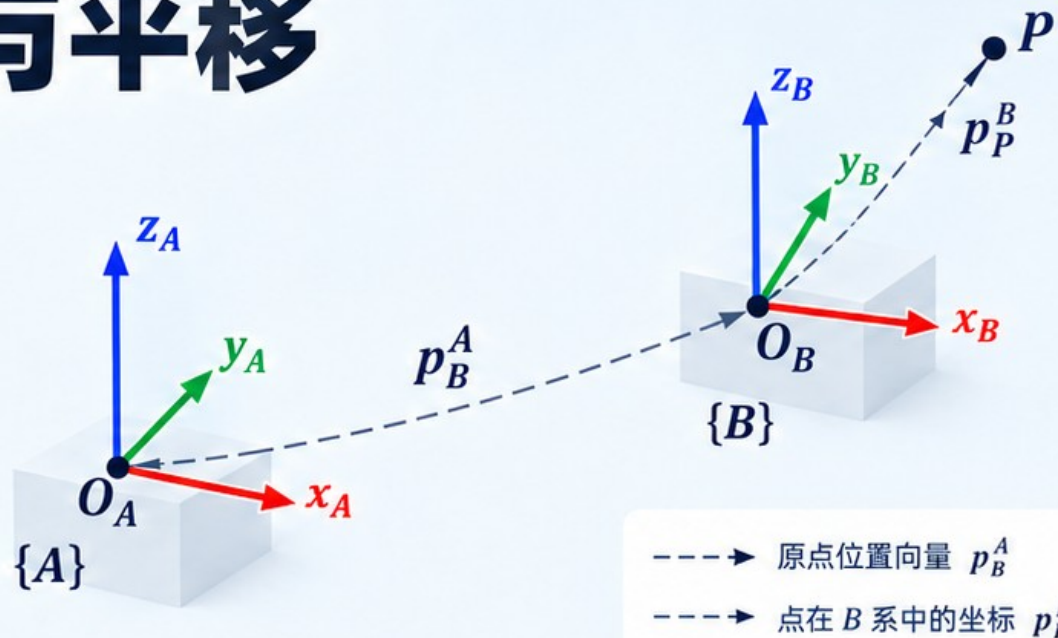
—— 点的刚体变换公式

已知点 P 在坐标系 B 中的坐标 p_P^B ，其在坐标系 A 中的坐标为

$$p_P^A = \underbrace{R_B^A p_P^B}_{\text{旋转: 统一坐标轴方向}} + \underbrace{p_B^A}_{\text{平移: 处理原点偏移}}$$

旋转：统一坐标轴方向

平移：处理原点偏移



—— 变换的两步理解

1 右侧点坐标在 B 系表达

p_P^B 是点 P 在坐标系 B 中的坐标：

$$p_P^B = \begin{bmatrix} x_P^B \\ y_P^B \\ z_P^B \end{bmatrix}$$

描述点 P 相对于 B 系原点 O_B 的位置 (使用 B 系的坐标轴方向)。

2 乘旋转后转为 A 系方向

用旋转矩阵 R_B^A 将坐标从 B 系转换到 A 系的坐标轴方向：

$$p' = R_B^A p_P^B$$

此时 p' 表示点 P 在与 A 系坐标轴平行的方向上，但原点仍在 O_B 。

3 再加 B 系原点在 A 系的位置

将 B 系原点在 A 系中的位置向量 p_B^A 加上：

$$p_P^A = R_B^A p_P^B + p_B^A$$

完成原点的平移，得到点 P 在 A 系中的最终坐标。



齐次变换矩阵

用一个 4×4 矩阵统一表示旋转和平移

“

齐次变换矩阵将旋转和平移统一在一个矩阵中，是机器人运动学中最常用的坐标变换表示方式。

齐次变换矩阵的形式

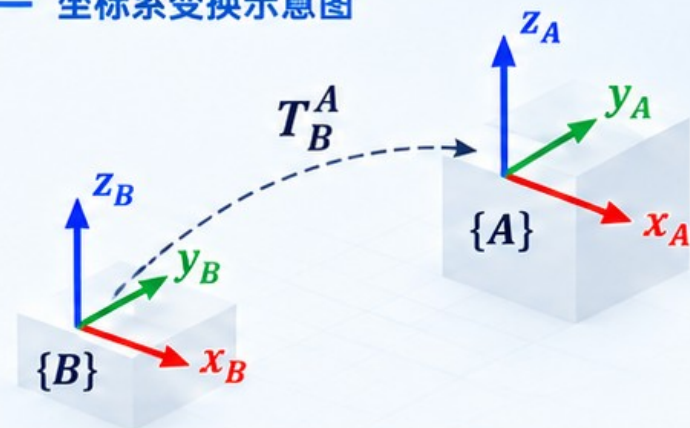
1 左上 3×3 : 旋转
表示坐标系的方向变化

2 右上 3×1 : 平移
表示坐标系的原点偏移

$$T_B^A = \begin{bmatrix} R_B^A & p_B^A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 最后一行固定为 $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$
用于齐次坐标表示

坐标系变换示意图



T_B^A 将 B 系中的点坐标变换到 A 系中：
先旋转，再平移。

齐次点的变换公式

$$p_h^A = T_B^A p_h^B$$

把三维点扩展为
 $[x, y, z, 1]^T$ 后，
旋转和平移都可通过一次矩阵乘法完成。



要点总结

- 1 齐次变换矩阵用一个 4×4 矩阵统一表示旋转和平移
- 2 左上 3×3 是旋转矩阵，右上 3×1 是平移向量
- 3 最后一行固定为 $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$
- 4 可直接作用于齐次坐标，实现一次矩阵乘法完成变换



齐次坐标中的点与方向

最后一维决定是否受到平移影响

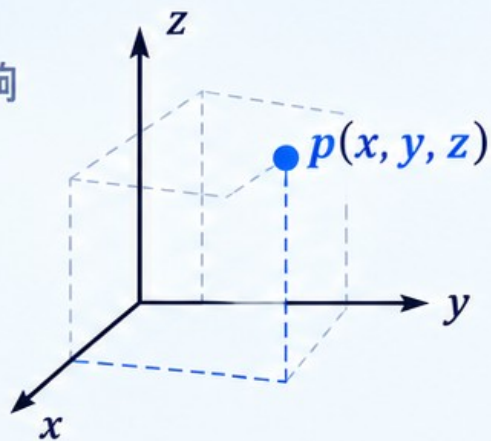


点坐标

受到旋转和平移的影响

空间中的一个具体位置
用齐次坐标表示为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$



$$p' = Rp + t$$

同时受到旋转 R 和平移 t
在空间中发生位置的变化

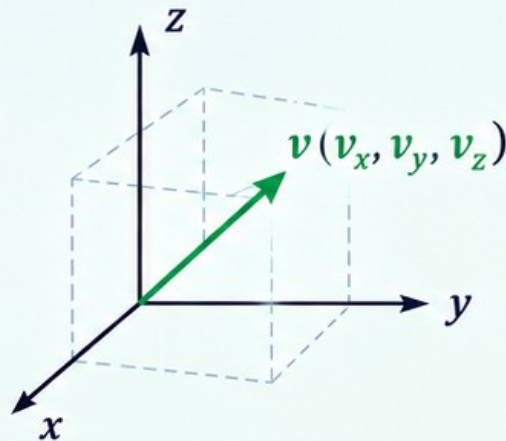


方向向量

只受到旋转的影响

表示方向、速度、力等向量
用齐次坐标表示为

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$



$$v' = Rv$$

只受到旋转 R 的影响
不发生平移，方向保持不变



最后一维的 **1** 或 **0**，把点和方向在同一矩阵框架中区分开



用齐次变换转换点坐标

输入在 B 系，输出在 A 系

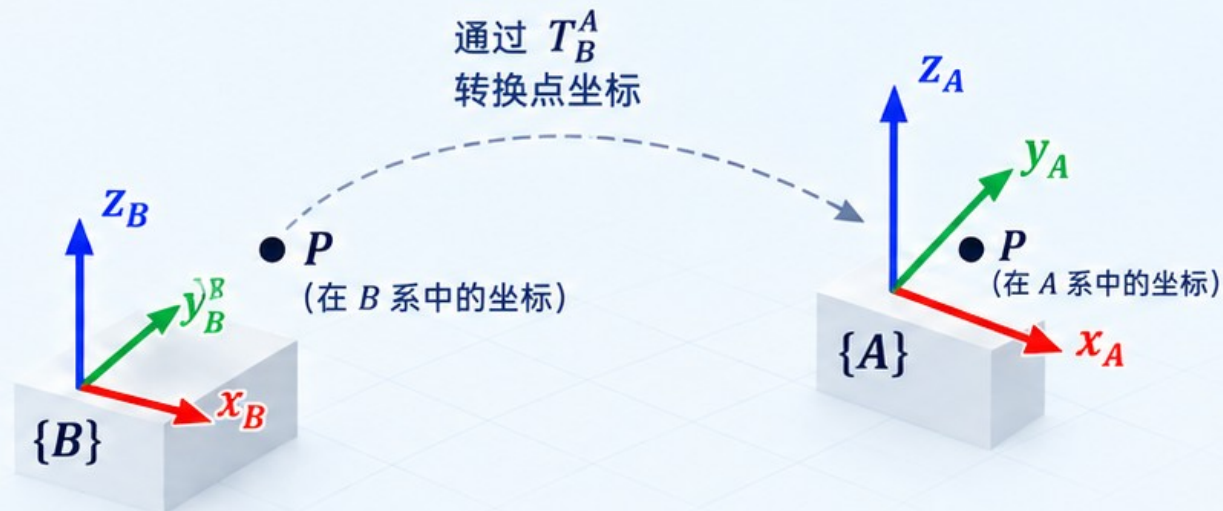
基本公式

$$\begin{bmatrix} p_P^A \\ 1 \end{bmatrix} = T_B^A \begin{bmatrix} p_P^B \\ 1 \end{bmatrix}$$

将点 P 在 B 坐标系中的齐次坐标，
通过齐次变换矩阵 T_B^A 转换到 A 坐标系中。

使用要点

- 1 矩阵右上标与输出一致
- 2 矩阵右下标与输入一致
- 3 结果最后一维仍为 1



小提示

检查维度、上下标和最后一维，
可以同时发现多数方向错误。



齐次变换的组合

和旋转矩阵一样，中间坐标系必须配对

—— 齐次变换的组合公式

$$T_C^A = T_B^A T_C^B$$

矩阵乘法从右向左作用

表示：先从 C 系变换到 B 系，再从 B 系变换到 A 系，得到 C 系相对于 A 系的变换。

—— 旋转部分的组合

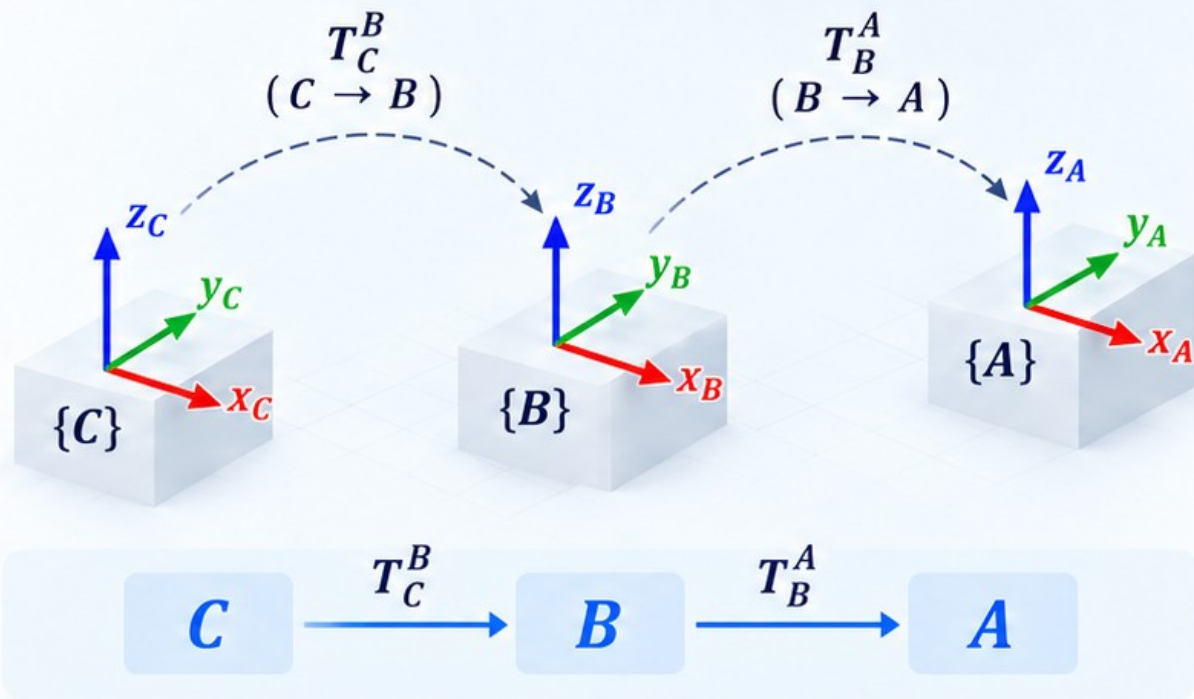
$$R_C^A = R_B^A R_C^B$$

组合后的旋转矩阵表示 C 系相对于 A 系的方向。

—— 平移部分的组合

$$p_C^A = R_B^A p_C^B + p_B^A$$

组合后的平移向量表示 C 系原点在 A 系中的位置。



要点总结

- 1 中间坐标系必须配对（ B 系在中间）。
- 2 矩阵乘法从右向左作用。
- 3 组合后同时得到 C 系相对于 A 系的旋转与平移。



齐次变换的逆

反向变换需要同时反转旋转和平移

齐次变换的逆矩阵

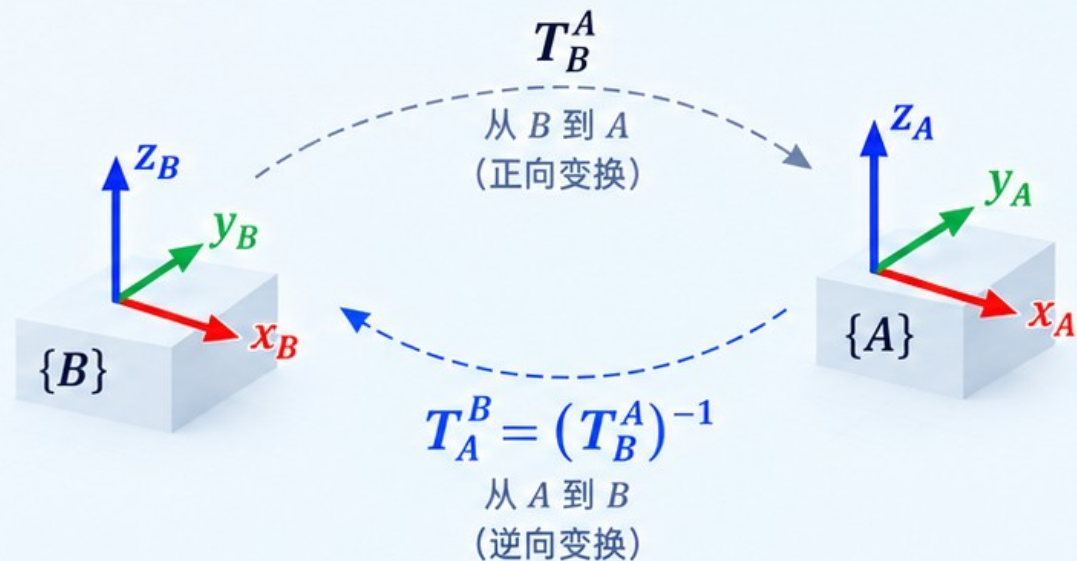
$$(T_B^A)^{-1} = T_A^B = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如果 T_B^A 表示从 B 坐标系到 A 坐标系的变换，
其逆变换 T_A^B 表示从 A 坐标系到 B 坐标系的变换。

齐次变换取逆的三个要点

- 1 旋转部分取转置** 逆旋转为 R^T ，因为旋转矩阵是正交矩阵， $R^{-1} = R^T$ 。
- 2 平移部分是 $-R^T p$** 平移向量不能简单取负，必须先用逆旋转 R^T 把它表达在新的参考系中。
- 3 交换变换的上下标** T_B^A 的逆变换是 T_A^B ，即变换的起点和终点互换。

坐标系的正反变换关系



重要提醒

平移不能简单取负；
必须先用逆旋转把它表达在新的参考系中。

因为平移向量的坐标是相对于原坐标系表示的，
在反向变换时需要先将其旋转到新的参考系中，再取负。



坐标变换链

复杂系统通过多个已知变换连接

“

在实际机器人系统中，往往需要通过多个已知的坐标变换将感知、世界、机器人和目标联系起来，形成完整的坐标变换链。

01 相机 C

感知输出目标相对于相机的位姿 T_P^C

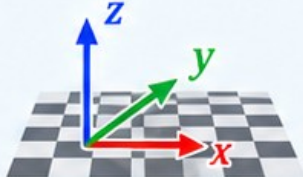
 T_P^C

相机坐标系
→ 目标坐标系

T_P^C ：由视觉算法（如位姿估计、PnP）得到

02 世界 W

外参标定提供相机与世界之间的变换 T_C^W



{W} 世界坐标系

T_C^W ：通过相机标定获得（相机在世界中的位姿）

 T_C^W

世界坐标系
→ 相机坐标系

03 基座 0

机器人安装标定提供基座与世界的关系 T_W^0



{0} 基座坐标系

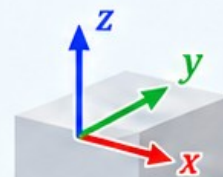
T_W^0 ：通过机器人安装标定获得（世界在基座中的位姿）

 T_W^0

基座坐标系
→ 世界坐标系

04 目标 P

组合得到目标相对于基座的位姿 T_P^0



{P} 目标坐标系

T_P^0 ：目标在基座坐标系中的位姿（用于抓取、操作）



坐标变换链公式

将多个已知变换相乘，得到目标相对于基座的位姿：

$$T_P^0 = T_W^0 T_C^W T_P^C$$

- ✓ 变换顺序要正确
- ✓ 各变换的坐标系需一致
- ✓ 可用于目标定位、抓取和轨迹规划



应用示例

通过相机识别工件，结合标定得到的变换链，计算工件在机器人基座坐标系中的位姿，从而引导机器人进行抓取操作。



相机到机器人基座的转换

手眼标定给出相机与机器人之间的固定关系

“

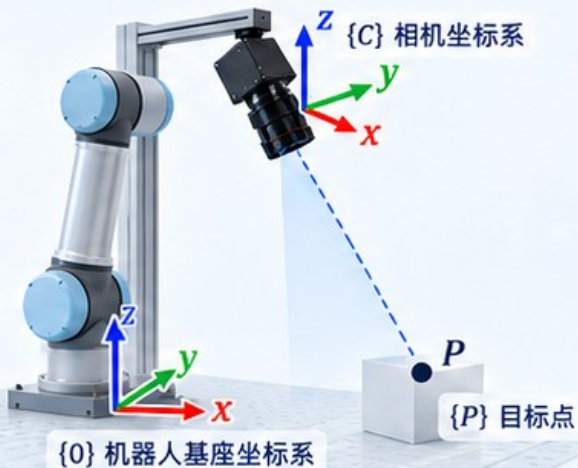
必须先判断相机安装方式，再选择坐标链。

1 外置相机

相机固定在机器人工作空间外部，与基座有固定的空间关系。

$$T_P^0 = T_C^0 T_P^C$$

- 1 T_C^0 : 相机到基座的转换
(通常通过手眼标定或测量获得)
- 2 T_P^C : 目标点在相机坐标系中的坐标
(由视觉检测得到)
- 3 计算得到目标点在机器人基座坐标系中的坐标 T_P^0



✓ 特点

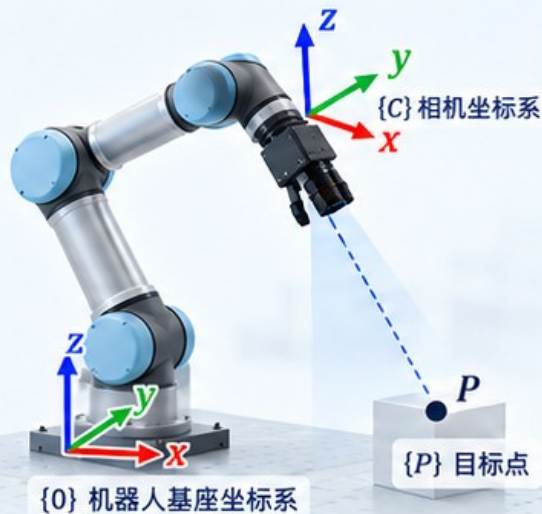
- 相机与基座之间是固定关系， T_C^0 不随机器人运动而变化。
- 常用于工位检测、上料定位、环境感知等场景。

2 腕部相机

相机安装在机器人末端执行器（法兰/夹爪）上，随机器人运动。

$$T_P^0 = T_E^0 T_C^E T_P^C$$

- 1 T_E^0 : 末端执行器到基座的转换
(由机器人正运动学得到，随关节变化)
- 2 T_C^E : 相机到末端执行器的转换
(通过手眼标定获得，固定不变)
- 3 T_P^C : 目标点在相机坐标系中的坐标
(由视觉检测得到)
- 4 计算得到目标点在机器人基座坐标系中的坐标 T_P^0



✓ 特点

- 相机通过末端执行器与基座相连， T_E^0 随机器人关节运动而变化。
- 常用于引导抓取、装配、位姿精确对齐等应用。



数值例子：二维刚体变换

B 系相对 A 系旋转 90° ，原点位于 A 系的 $(2, 1)$

1 已知条件

已知点 P 在 B 系中的坐标为：

$$p_P^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 计算过程

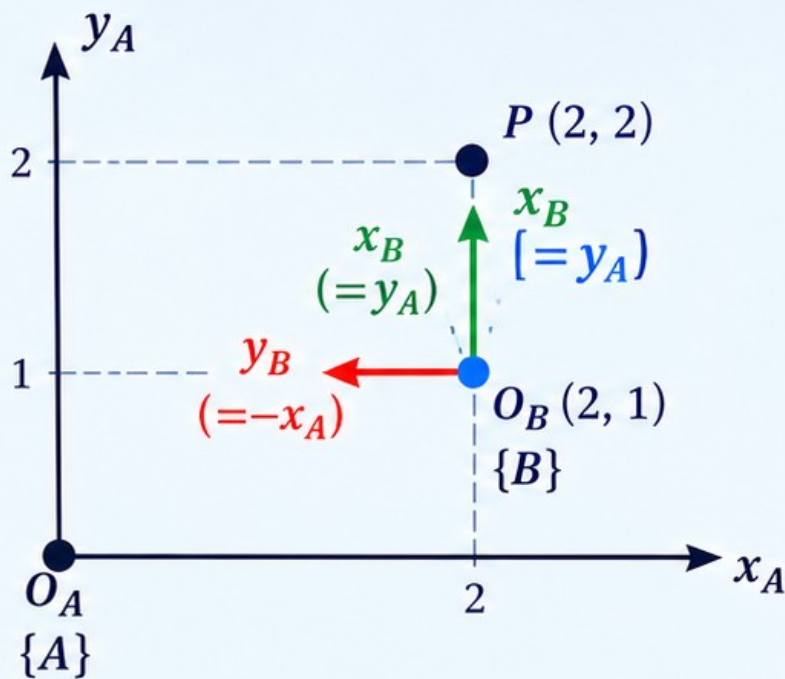
(1) 先旋转： B 相对 A 旋转 90°

$$R(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R(90^\circ) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即： B 系的 x 轴在 A 系中指向 A 系的 y 轴。

(2) 再平移：加上 B 系原点在 A 系中的位置 $(2, 1)$

$$p_P^A = R(90^\circ) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$



💡 总结：先旋转局部坐标，再加 B 系原点在 A 系中的位置。

1 局部点沿 Bx 方向 1

点 P 在 B 系中的坐标为 $[1, 0]^T$ ，
表示沿 B 系的 x 轴方向 1 个单位。

2 Bx 在 A 系中指向 Ay

由于 B 相对 A 旋转 90° ，
 B 系的 x 轴在 A 系中指向 y 轴。

3 A 原点到 B 原点为 $(2, 1)$

B 系原点在 A 系中的位置为 $(2, 1)$ ，
即平移向量为 $[2, 1]^T$ 。



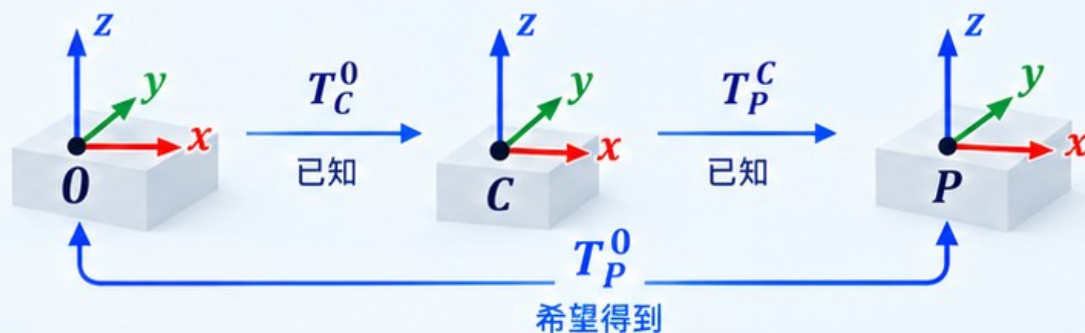
坐标链计算

随堂练习 3 · 先独立判断，再与同伴核对

问题

已知 T_C^0 、 T_P^C ，希望得到目标在基座系中的位姿 T_P^0

下图给出了坐标系之间的关系和已知变换，请完成以下问题。



1 写出变换链并检查相邻上下标

根据已知条件，写出从基座到目标的变换链并检查相邻变换的上下标是否匹配。

请写出 T_P^0 的表达式：

?

2 若标定文件只给出 T_0^C

若实际标定文件中只提供 T_0^C (而不是 T_C^0)，说明需要哪一步处理才能用于计算 T_P^0 。



提示：

注意正向与逆向变换的区别。

3 列出至少两个数值检查方法

为确保计算结果正确，列出至少两个可以进行数值验证的方法。

- ✓ 维度与相邻坐标系是否匹配
- ✓ 代入简单点或用逆变换回代检查
- ✓ (请补充至少两种方法)



输出：正确公式、反向变换处理和验证清单

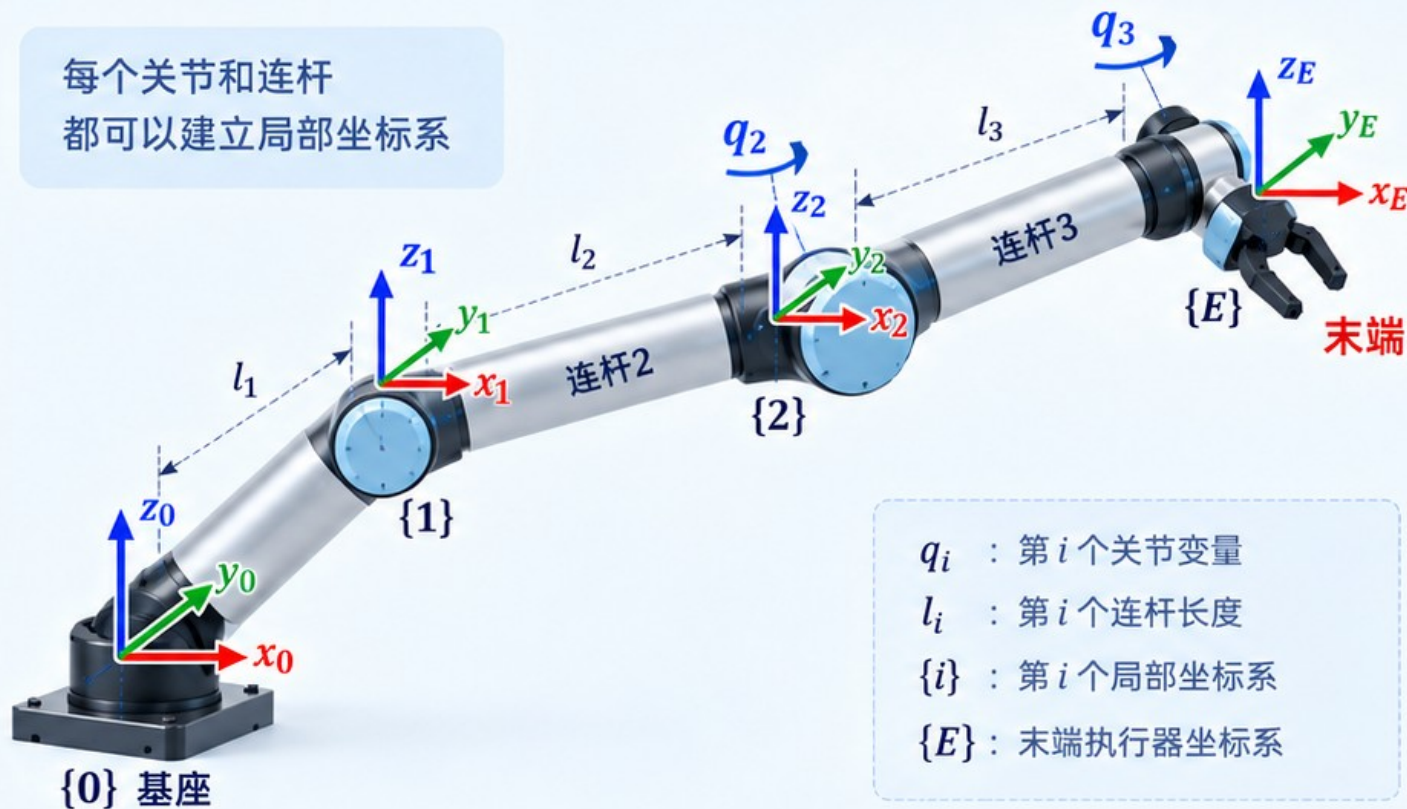
独立思考后与同伴核对，交流不同的解法与验证思路。



从坐标链到机器人关节链

串联机械臂把多个局部变换依次连接

每个关节和连杆
都可以建立局部坐标系



q_i : 第 i 个关节变量
 l_i : 第 i 个连杆长度
 $\{i\}$: 第 i 个局部坐标系
 $\{E\}$: 末端执行器坐标系

1 局部坐标系的建立



在串联机械臂中，可以在基座、每个关节和末端执行器上建立局部坐标系，用于描述相邻连杆之间的相对位置和姿态。

2 关节变量与相邻变换



关节变量 q_i (如转动关节的角度、移动关节的位移) 会改变相邻两个坐标系之间的变换关系 $T_i^{i-1}(q_i)$ 。

3 正运动学：整条链的变换相乘



将从基座到末端的所有局部变换按顺序相乘，即可得到末端执行器相对于基座的位姿。



正运动学的数学表示

$$T_E^0(q) = T_1^0(q_1)T_2^1(q_2) \cdots T_E^{n-1}(q_n)$$

关节变量进入相邻局部变换，整条链相乘得到末端位姿



关节与连杆

机构结构决定坐标系之间怎样变化



关节 Joint

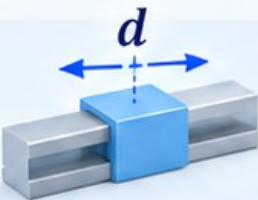
连接相邻连杆并允许相对运动

- 1 连接相邻连杆并允许**相对运动**
- 2 **关节变量**描述可动自由度
- 3 常见类型是**转动关节**与**移动关节**

转动关节
(Revolute, R)



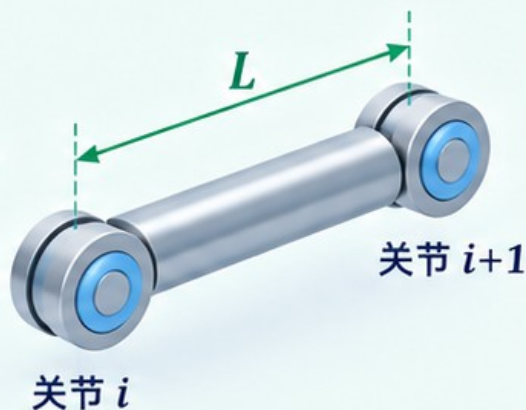
移动关节
(Prismatic, P)



连杆 Link

连接两个关节的刚性结构

- 1 连接两个关节的**刚性结构**
- 2 **几何尺寸**在理想模型中**固定**
- 3 为局部坐标系提供**安装关系**



正运动学把**关节运动**与**固定连杆几何**统一为**连续的刚体变换**



转动关节与移动关节

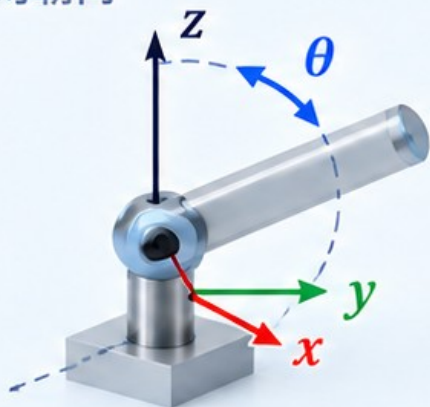
关节类型决定变量进入旋转还是平移



转动关节 *Revolute*

关节变量是角度，改变相对朝向

- 1 关节变量是角度 θ
- 2 围绕固定轴改变相对朝向
- 3 平移参数通常由机构尺寸决定（如连杆长度）



绕固定轴旋转

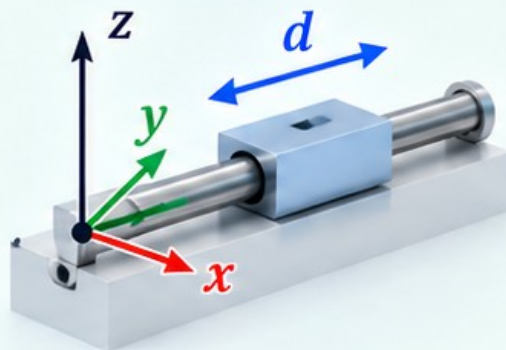
关节变量: $\theta \in \mathbb{R}$



移动关节 *Prismatic*

关节变量是位移，改变相对位置

- 1 关节变量是位移 d
- 2 沿固定轴改变相对位置
- 3 旋转关系通常保持不变（两坐标系轴向一致）



沿固定轴平移

关节变量: $d \in \mathbb{R}$



判断关节类型后，才能确定相邻变换中哪一项是变量

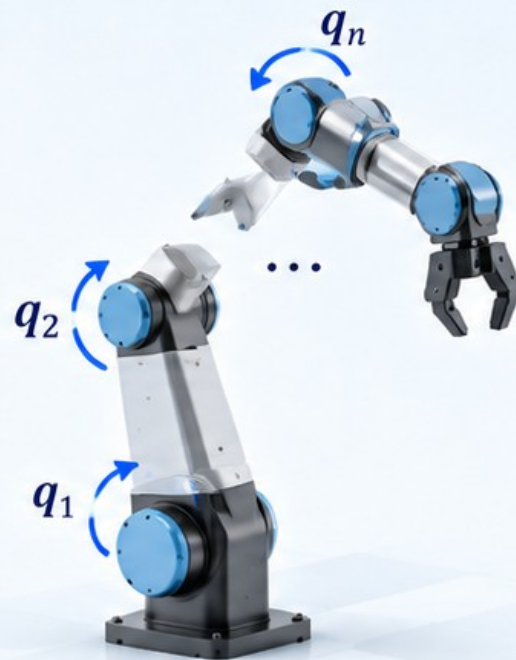


关节变量向量

用 q 统一表示机器人构型

$$q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$$

给定 q 和机构几何参数，正运动学函数 $f(q)$ 输出末端位姿。



$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

1



转动关节
 q_i 是角度

例如: $q_i \in (-\pi, \pi]$ (弧度)

2



移动关节
 q_i 是位移

例如: $q_i \in \mathbb{R}$ (米)

3



**q 的维度等于
独立关节自由度**

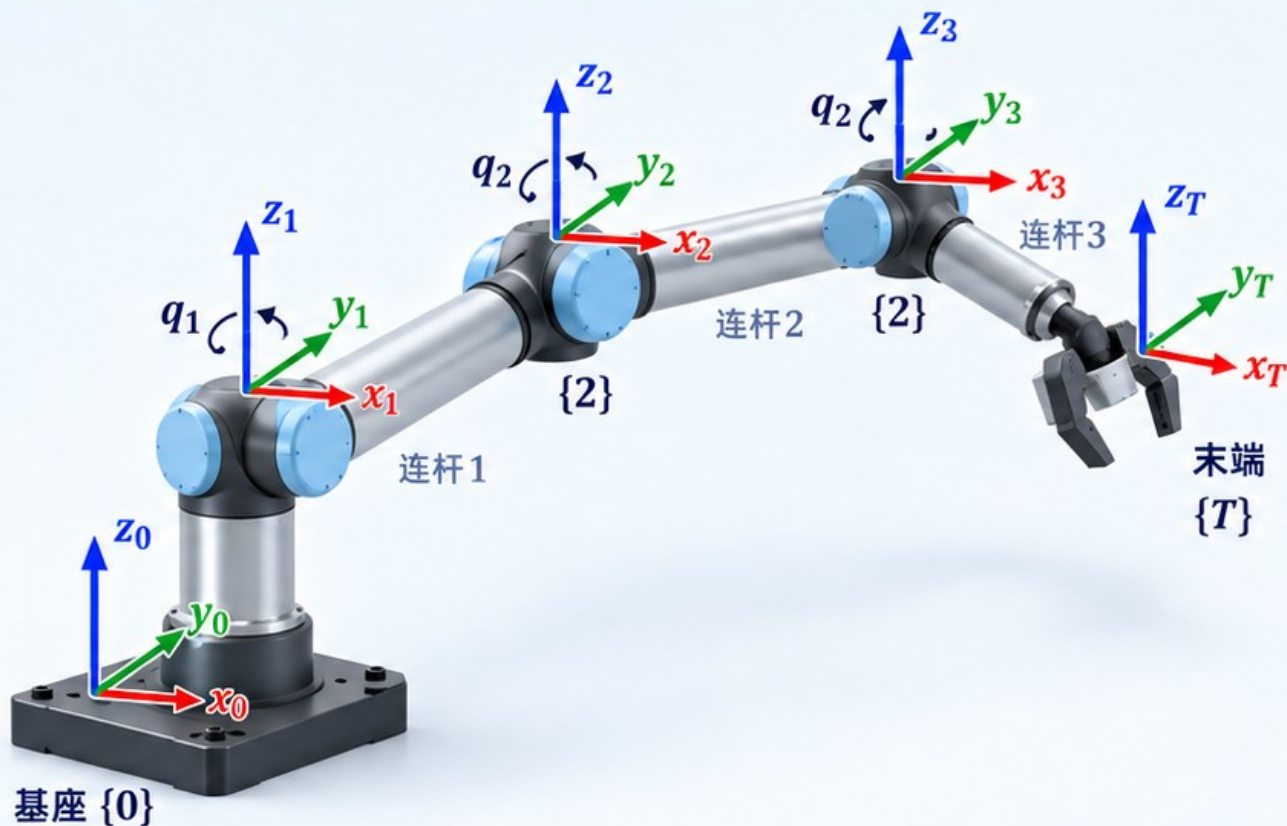
n 为机器人独立关节的数量

$$q \in \mathbb{R}^n$$



怎样在机械臂上附着坐标系

每个局部坐标系都服务于相邻变换



1

基座坐标系固定在机器人底座。



通常将 $\{0\}$ 固定在机器人底座上，用于描述整个机械臂在空间中的位置和姿态。

2

各关节坐标系通常让 z 轴与关节轴对齐。



在每个关节 $\{i\}$ 处建立局部坐标系，通常将 z 轴与该关节的旋转轴对齐， x 、 y 轴按右手定则确定。

3

末端工具坐标系固定在夹爪或工具中心点。



将 $\{T\}$ 固定在夹爪、吸盘或其他工具的中心点，用于描述末端执行器的位姿。



坐标系选择可以不同，但必须全程一致。

只要定义清晰、右手系一致，坐标系的具体方向选择可以不同，但在整个运动学建模过程中必须保持一致。

局部变换:

$$T_i^{i-1}(q_i)$$

表示从坐标系 $\{i-1\}$ 到坐标系 $\{i\}$ 的变换，是关节变量 q_i 的函数。



正运动学问题

已知关节变量，计算末端位姿

1 输入：机器人几何参数 + 关节变量 q



机器人几何参数
(连杆长度、关节类型等)

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

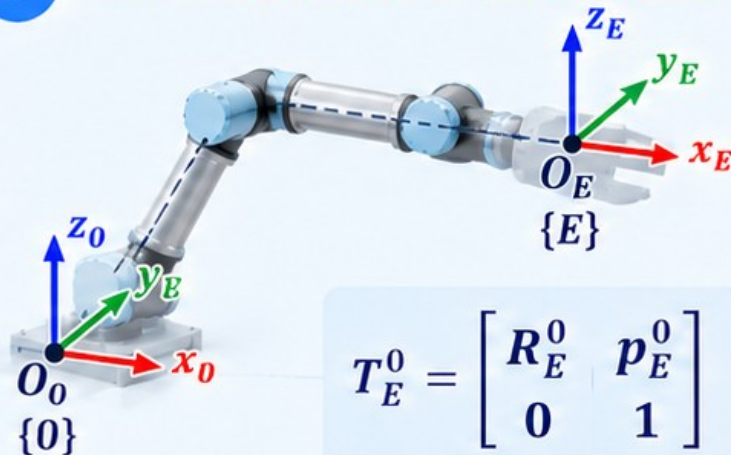
关节变量 q
(如关节角度或位移)

2 正运动学模型

根据机器人几何结构和关节变量，沿关节链计算末端位姿。

$$T_E^0 = FK(q)$$

3 输出：末端相对于基座的旋转与平移



输入是机器人几何参数与关节变量 q ；输出是末端相对于基座的旋转和平移。



输入通常唯一确定

对于给定的机器人几何参数和关节变量 q ，末端位姿在没有奇异性的情况下通常是唯一的。



输出包含位置与姿态

末端位姿由旋转矩阵 R_E^0 和位置向量 p_E^0 组成，包含位置和平移信息。



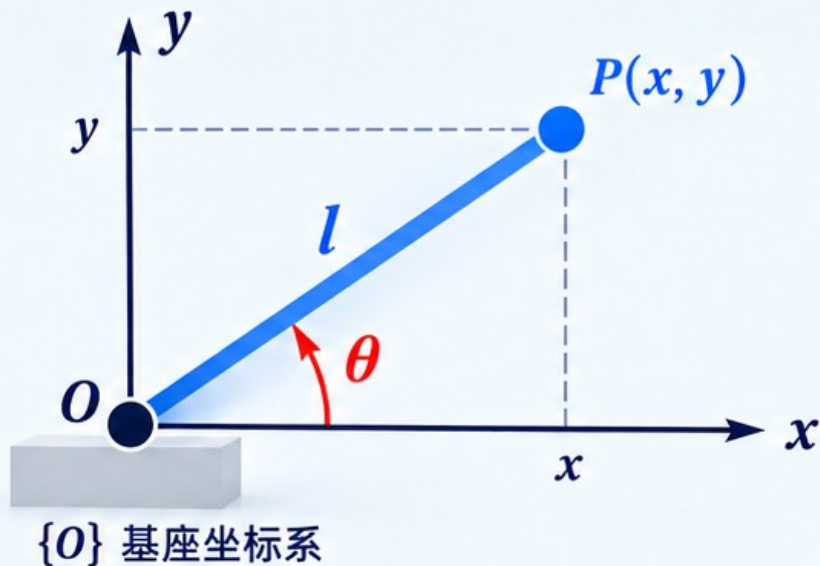
计算沿关节链从基座到末端

通过将各关节的齐次变换矩阵依次相乘，从基座坐标系沿关节链得到末端位姿。



单转动关节的正运动学

长度为 l 的连杆绕基座 z 轴旋转 θ



—— 末端位置与姿态

$$x = l \cos \theta$$

$$y = l \sin \theta$$

$$\varphi = \theta$$

末端位置在半径 l 的圆上，末端朝向与关节角同步变化。



当 θ 变化时，末端点 P 沿半径 l 的圆周运动。

—— 几个典型情况

1 $\theta = 0^\circ$ 末端位于 $(l, 0)$

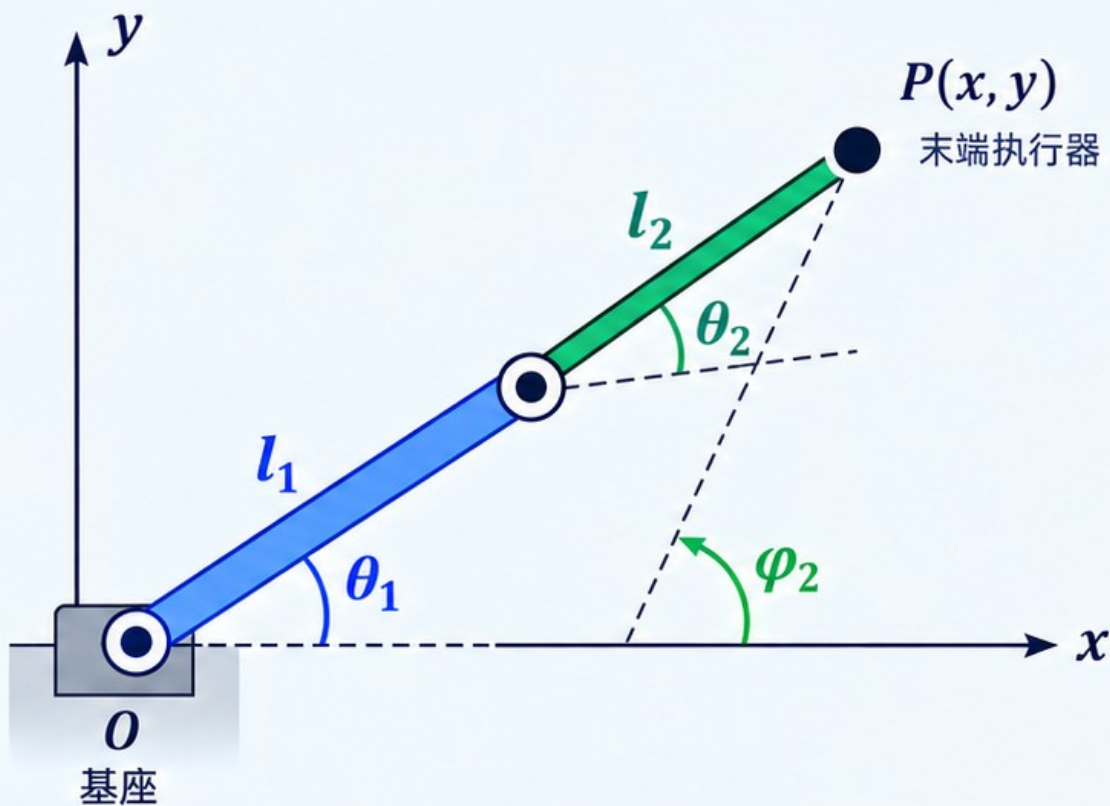
2 $\theta = 90^\circ$ 末端位于 $(0, l)$

3 位置与姿态都由同一个关节变量决定



平面二连杆机械臂

两个转动关节让末端在平面内形成二维工作空间



1

第一个关节决定整条机械臂的基准方向。

角度 θ_1 决定了第一根连杆在平面内的朝向，从而确定整个机械臂的基准方向。

2

第二个关节角相对于第一根连杆定义，因此第二根连杆的绝对方向为 $\theta_1 + \theta_2$ 。

角度 θ_2 是相对于第一根连杆的转角，因此第二根连杆相对于全局坐标系的绝对方向为 $\theta_1 + \theta_2$ 。



第二连杆绝对角

$$\varphi_2 = \theta_1 + \theta_2$$



末端位置坐标

末端执行器 P 在平面坐标系中的位置 (x, y) 为：

$$\begin{cases} x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$



二连杆正运动学公式

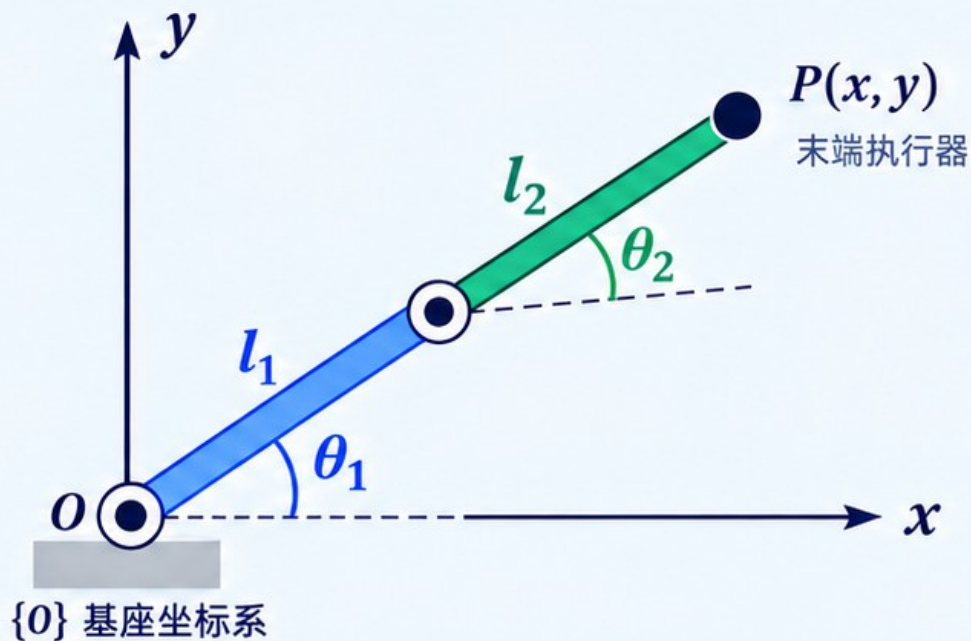
末端位置是两段连杆位移的向量和

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\varphi = \theta_1 + \theta_2$$

第一项来自第一连杆，第二项来自第二连杆；姿态角等于两关节角之和。



1

θ_2 使用相对角定义

θ_2 是相对于第一连杆的转角，因此第二连杆的绝对方向为 $\theta_1 + \theta_2$ 。



2

位置由两段向量相加

末端位置是第一连杆和第二连杆位移向量的和，即 $P = r_1 + r_2$ 。



3

零角与折叠姿态可用于自检

当 $\theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$ 时，末端位于 $(l_1 + l_2, 0)$ ；
当 $\theta_2 = 180^\circ$ 时，机械臂折叠，末端位于 $(l_1 - l_2, 0)$ 。

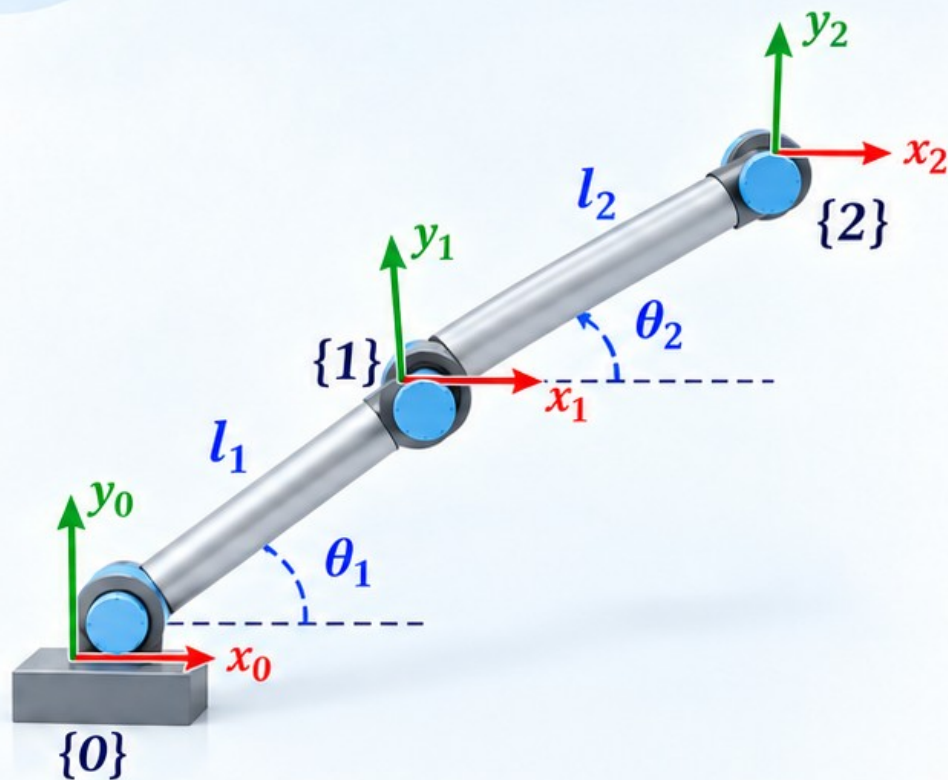


用齐次变换计算二连杆

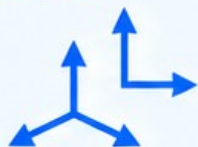
局部变换相乘自动完成旋转与平移组合

$$T_2^0 = T_1^0(\theta_1, l_1) T_2^1(\theta_2, l_2)$$

每一步先描述相邻坐标系关系，再沿关节链相乘。
乘积右上角给出末端位置，左上角给出末端旋转。



1 建立 0、1、2 三个坐标系



在基座、关节1和末端分别建立 {0}、{1}、{2} 坐标系，按右手定则确定各坐标轴方向。

2 分别写 T_1^0 与 T_2^1



根据关节角度和连杆长度，写出从 {0} 到 {1} 的齐次变换 $T_1^0(\theta_1, l_1)$ ，以及从 {1} 到 {2} 的齐次变换 $T_2^1(\theta_2, l_2)$ 。

3 相乘得到与几何法相同的结果

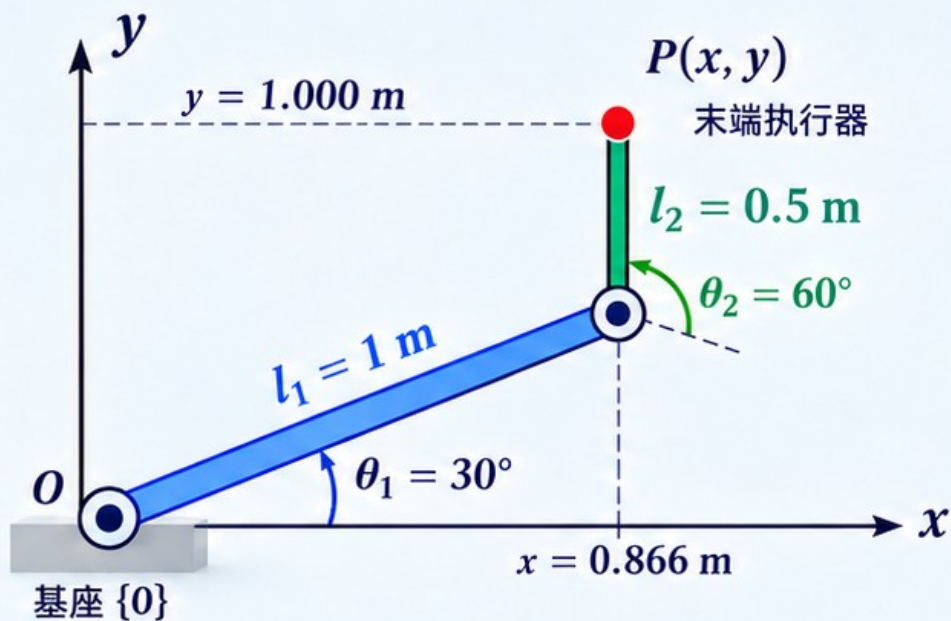


相乘得到 T_2^0 ，提取其位置 (x, y) 和末端姿态 φ ，与几何法推导的结果一致。



二连杆数值例子

$$l_1 = 1 \text{ m}, \quad l_2 = 0.5 \text{ m}, \quad \theta_1 = 30^\circ, \quad \theta_2 = 60^\circ$$



正运动学计算

$$x = 1 \cdot \cos 30^\circ + 0.5 \cdot \cos 90^\circ = 0.866 \text{ m}$$

$$y = 1 \cdot \sin 30^\circ + 0.5 \cdot \sin 90^\circ = 1.000 \text{ m}$$

$$\varphi = 90^\circ$$



结果解释

结果表明第二根连杆竖直向上，末端位于第一关节投影的上方。

1



先计算绝对角

$$\theta_1 + \theta_2$$

2



角度代入前确认

度或弧度

3



用示意图检查

象限与数量级

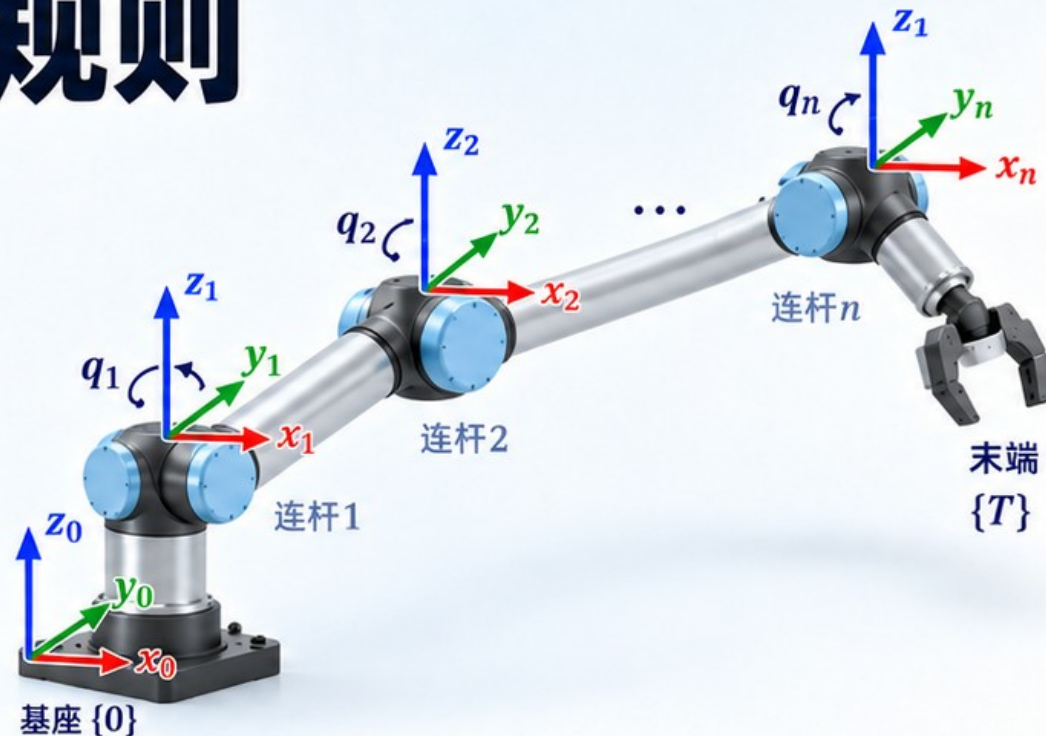


串联机械臂的通用链式规则

每个局部变换只描述相邻坐标系

$$T_n^0(q) = T_1^0(q_1) T_2^1(q_2) \cdots T_n^{n-1}(q_n)$$

关节数增加时，原则不变：定义坐标系、写局部变换、按链相乘、检查结果。



1

局部模型便于复用与调试



每个 $T_i^{i-1}(q_i)$ 只与相邻两个坐标系相关，便于模块化实现、复用和逐关节调试。

2

相邻上下标确保乘法方向



T_i^{i-1} 表示从坐标系 $\{i-1\}$ 到坐标系 $\{i\}$ 的变换，必须按从基座到末端的顺序左乘。

3

末端工具外参可继续乘在链末端

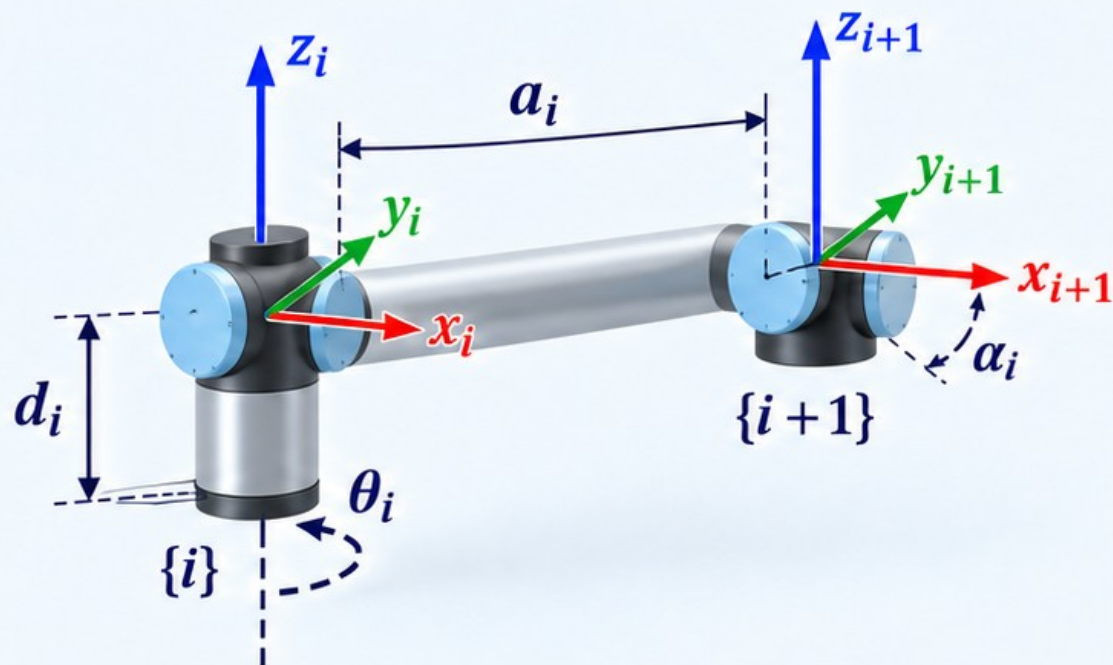


若存在工具坐标系 $\{T\}$ ，则将末端外参 T_T^n 继续乘在链末端，得到基座到工具的总变换 T_T^0 。



DH 参数法预告

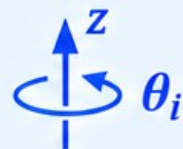
用四个参数系统描述相邻关节坐标系



标准 **DH** 参数把局部变换分解为四个基本量

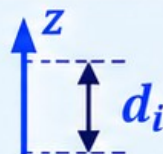
1

θ_i : 绕 z 轴的关节角,
转动关节通常以它为变量



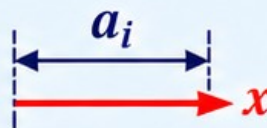
2

d_i : 沿 z 轴的偏移,
移动关节通常以它为变量



3

a_i : 沿 x 轴的连杆长度,
描述相邻关节轴距离



4

α_i : 绕 x 轴的扭转角,
描述相邻关节轴方向关系



DH 法的价值在于统一建模流程；先理解坐标链，再学习参数表



正运动学排错清单

随堂练习 4 · 先独立判断，再与同伴核对

? 程序计算出的末端位置明显不合理，应怎样定位问题？

1



检查角度单位、长度单位和关节零位定义

确认角度是度还是弧度，长度单位是否一致，以及各关节的零位角定义是否正确。

2



检查每个局部变换的方向与矩阵乘法顺序

确认各关节坐标系的建立方向是否正确，以及变换矩阵的乘法顺序是否符合所采用的方法。

3



分别测试零位、单关节运动和简单对称姿态

先验证零位姿态是否正确，再逐个关节单独运动，最后测试一些简单对称姿态，缩小问题范围。

4



将解析结果与仿真模型或实测标志点对比

把程序计算的末端位置与仿真软件中的结果或实际机器人上测量的标志点位置进行对比，检查是否一致。



输出： 按优先级排序的四步排错流程，并说明每一步能发现什么错误。



本周小结与下周预告

从坐标表达建立正运动学模型

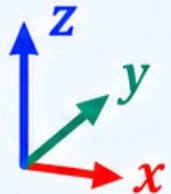


从理解
到实践...



本周掌握

1 坐标系与记号



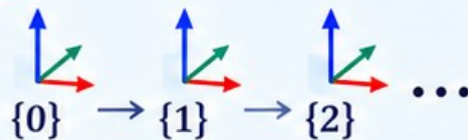
任何坐标都必须说明参考系。

2 旋转与齐次变换



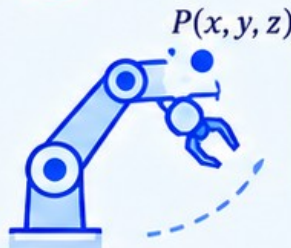
通过矩阵组合方向和原点偏移。

3 坐标链



相邻上下标配对，
矩阵从右向左作用。

4 正运动学



由关节变量
计算末端
位置与姿态。



下周：逆运动学与 *Jacobian*

从“关节决定末端”转向“目标末端位姿需要哪些关节变量”，并分析速度与微分运动关系。



建议阅读： *Modern Robotics Ch. 3-4*； *MIT Robotic Manipulation* 中的 *Rigid Transformations*； *MoveIt 2 Robot Model*

